Robin J. Wilson

WPROWADZENIE DO TEORII GRAFÓW

Z języka angielskiego przełożył
Wojciech Guzicki

Wydanie drugie

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2007

Dane oryginału

Introduction to Graph Theory
Robin J. Wilson
Fourth edition

© Robin Wilson 1972, 1996

This translation of *Introduction to Graph Theory*, Fourth Edition is published by arrangement with Addison Wesley Longman Limited, London.

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor **Agnieszka Grabarczyk**

Redaktor techniczny **Beata Stelęgowska**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 1998

ISBN 978-83-01-15066-2

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie drugie, 3 dodruk
Arkuszy drukarskich 14
Druk ukończono w styczniu 2007 r.
Druk i oprawa: Wrocławska Drukarnia Naukowa PAN
im. St. Kulczyńskiego Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa do nowego wydania . . . **7**

Wykaz oznaczeń **9**

1. Wprowadzenie **11**

1. Co to jest graf? **11**

2. Definicje i przykłady **19**

2. Definicje **19**
3. Przykłady **29**
4. Trzy łamigłówki **35**

3. Drogi i cykle **41**

5. Spójność **41**
6. Grafy eulerowskie **47**
7. Grafy hamiltonowskie **53**
8. Kilka algorytmów **56**

4. Drzewa **63**

9. Własności drzew **63**
10. Zliczanie drzew **68**
11. Dalsze zastosowania **74**

5. Planarność **82**

12. Grafy planarne **82**
13. Twierdzenie Eulera **89**
14. Grafy na innych powierzchniach **95**
15. Grafy dualne **99**
16. Grafy nieskończone **105**

6. Kolorowanie grafów **110**

17. Kolorowanie wierzchołków . . **110**
18. Twierdzenie Brooksa **117**
19. Kolorowanie map **119**
20. Kolorowanie krawędzi **125**
21. Wielomiany chromatyczne . . **130**

7. Digrafy **135**

22. Definicje **135**
23. Digrafy eulerowskie i turnieje . **141**
24. Łańcuchy Markowa **146**

8. Skojarzenia, małżeństwa i twierdzenie Mengera **151**

25. Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw **151**
26. Teoria transwersal **155**
27. Zastosowania twierdzenia Halla **159**
28. Twierdzenie Mengera **163**
29. Przepływy w sieciach **169**

9. Matroidy **176**

30. Wprowadzenie do matroidów . **176**
31. Przykłady matroidów **180**
32. Matroidy i grafy **185**
33. Matroidy i transwersale . . . **191**

Dodatek **196**

Bibliografia **197**

Rozwiązania wybranych ćwiczeń . **200**

Skorowidz **220**

Dalej moja książeczko! podążaj swą drogą!
Dalej, by radować szlachetnych i dobrych!
WILLIAM WORDSWORTH

Przedmowa do nowego wydania

W ostatnich latach teoria grafów ugruntowała swoją pozycję jako ważne narzędzie matematyczne w wielu różnych dziedzinach, od rachunku operacyjnego i chemii po genetykę i lingwistykę oraz od elektroniki i geografii po socjologię i architekturę. Jednocześnie okazała się dyscypliną matematyczną wartą samodzielnych badań.

Dlatego też potrzebny jest niedrogi i przystępny podręcznik, odpowiedni zarówno dla matematyków uczęszczających na wykłady z teorii grafów, jak i dla niespecjalistów pragnących poznać tę dyscyplinę możliwie szybko. Mam nadzieję, że ta książka w jakimś stopniu spełni te oczekiwania. Do zrozumienia tej książki potrzebna jest jedynie podstawowa znajomość elementarnej teorii mnogości oraz algebry macierzy, chociaż do rozwiązania niektórych trudniejszych ćwiczeń może być potrzebna głębsza znajomość algebry abstrakcyjnej.

Treść tej książki dzieli się w naturalny sposób na cztery części. Pierwsza (rozdziały 1–4) dostarcza materiału na wykład wstępny: podstawowe definicje i przykłady grafów, spójność, drogi i cykle Eulera i Hamiltona oraz drzewa. Po niej następuje druga część (rozdziały 5 i 6), w której omówione są planarność i kolorowanie, ze szczególnym uwzględnieniem twierdzenia o czterech barwach. Trzecia część (rozdziały 7 i 8) dotyczy teorii grafów skierowanych i teorii transwersal oraz zastosowania ich do analizy dróg krytycznych, łańcuchów Markowa i przepływów w sieciach. Książka kończy się rozdziałem poświęconym matroidom (rozdział 9), który wiąże razem materiał z poprzednich rozdziałów i wprowadza pewne najnowsze osiągnięcia.

W całej książce starałem się ograniczyć przedstawiany materiał do najbardziej podstawowego, wykorzystując ćwiczenia do wprowadzenia treści o mniejszym znaczeniu. Część spośród 250 ćwiczeń to przykłady rutynowe, których celem jest sprawdzenie, czy wykład został dobrze zrozumiany, inne pokazują Czytelnikowi nowe wyniki i pomysły. Czytelnik powinien przeczytać każde ćwiczenie, niezależnie od tego, czy będzie je szczegółowo wykonywał, czy nie. Ćwiczenia trudniejsze są oznaczone gwiazdką.

Używałem symbolu ■ do oznaczenia końca dowodu, a pisma półgrubego do wyróżnienia definicji. Liczbę elementów zbioru S oznaczałem symbolem $|S|$, a zbiór pusty symbolem $\emptyset$.

W tym wydaniu książki wprowadziłem znaczne zmiany. Cały tekst ponownie przejrzałem i pewne określenia zmieniłem na używane obecnie. Ponadto dodałem rozwiązania niektórych ćwiczeń; te ćwiczenia są oznaczone symbolem ˜obok numeru. Pewne zmiany są wynikiem uwag zgłoszonych przez wiele osób i chciałbym skorzystać z okazji, by podziękować im za te cenne wskazówki.

Wreszcie chcę wyrazić wdzięczność moim byłym studentom, dzięki którym ta książka nie została ukończona rok wcześniej, oraz Panu Williamowi Szekspirowi i innym osobom za ich celne i dowcipne uwagi na początku każdego rozdziału; przede wszystkim jednak chciałbym podziękować mojej żonie Joy za wiele rzeczy, które nie mają nic wspólnego z teorią grafów.

R. J. W.

Maj 1995 r.
The Open University

Wykaz oznaczeń

Mam krótką listę.

W. S. Gilbert

$\mathbf{A}$	macierz sąsiedztwa	n	liczba wierzchołków
$A(D)$	zbiór łuków digrafu D	N_n	graf pusty
B	baza matroidu M	$P_G(K)$	wielomian chromatyczny grafu G
C_n	graf cykliczny		
$\mathrm{cr}(G)$	liczba przecięć grafu G	P_n	graf liniowy
D	digraf	Q_k	k-kostka
$\deg(v)$	stopień wierzchołka v	r	funkcja rzędu matroidu M
E	niepusty zbiór skończony	r^*	funkcja rzędu matroidu M^*
$E(G)$	zbiór krawędzi grafu G		
f	liczba ścian	$t(G)$	grubość grafu G
F	matroid Fano	T	drzewo
g	genus	u, v, w, z	wierzchołki grafu G
G	graf	$v_0 \to \ldots \to v_m$	trasa
$\overline{G}$	dopełnienie grafu G	$V(D)$	zbiór wierzchołków digrafu D
G^*	graf dualny grafu G		
$G(V_1, V_2)$	graf dwudzielny	$V(G)$	zbiór wierzchołków grafu G
$G_1 \cup G_2$	suma grafów		
I	zbiór niezależny matroidu M	W	podprzestrzeń cykli grafu G
k	liczba składowych	W^*	podprzestrzeń rozcięć grafu G
K_n	graf pełny		
$K_{r,s}$	pełny graf dwudzielny	W_n	koło
$K_{r,s,t}$	pełny graf trójdzielny	α, β, γ	kolory
$L(G)$	graf krawędziowy grafu G	$\gamma(G)$	liczba cyklomatyczna grafu G
m	liczba krawędzi		
M	matroid	$\Gamma(G)$	grupa automorfizmów grafu G
M^*	matroid dualny		
$M.A$	ściągnięcie matroidu	Δ	największy stopień wierzchołka grafu G
$M \times A$	ograniczenie matroidu		
$M(G)$	matroid cykliczny	$\kappa(G)$	spójność (wierzchołkowa) grafu G
$M(S_1, \ldots, S_m)$	matroid transwersalny		

$\lambda(G)$	spójność krawędziowa grafu G	$\chi'(G)$	indeks chromatyczny grafu G
$\xi(G)$	rząd rozcięcia (rząd spójności) grafu G	$\mathcal{B}$	bazy matroidu M
$\chi(G)$	liczba chromatyczna grafu G	$\mathcal{C}$	cykle matroidu M
		$\mathcal{F}$	rodzina podzbiorów
		I	zbiory niezależne matroidu M

1 Rozdział
Wprowadzenie

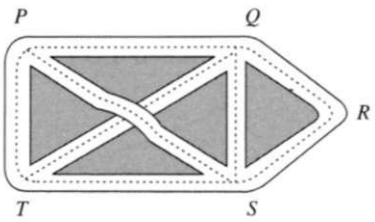
Ostatnią rzeczą, jaką się odkrywa
układając dzieło, jest to,
co należy pomieścić na początku.

BLAISE PASCAL

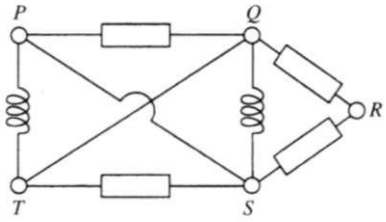
W tym wstępnym rozdziale zawrzemy intuicyjne podstawy tego wszystkiego, co będziemy omawiać w sposób bardziej formalny w następnych rozdziałach. Określenia pojęć, które pojawią się tu wyróżnione pismem półgrubym, należy rozumieć raczej jako opisy niż jako definicje. Zapoznawszy się z nimi w sposób nieformalny, łatwiej przyswoisz je sobie, gdy spotkasz je dalej. A więc przeczytaj ten rozdział szybko i szybko zapomnij o nim!

§1 Co to jest graf?

Zaczniemy od przyjrzenia się rysunkom 1.1 i 1.2, które pokazują fragmenty mapy drogowej i obwodu elektrycznego.

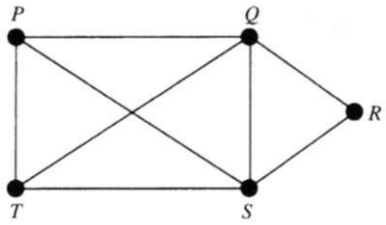


Rysunek 1.1



Rysunek 1.2

Każda z tych sytuacji może być przedstawiona na rysunku za pomocą punktów i odcinków, tak jak na rysunku 1.3. Punkty P, Q, R, S i T nazywamy **wierzchołkami**, odcinki nazywamy **krawędziami**, a cały wykres nazwiemy **grafem**. Zauważmy, że punkt przecięcia odcinków PS i QT nie jest wierzchołkiem, ponieważ nie odpowiada on ani skrzyżowaniu dróg, ani połączeniu dwóch przewodów. **Stopniem** wierzchołka nazwiemy liczbę krawędzi, których końcem jest ten wierzchołek; na rysunku 1.1 odpowiada on liczbie dróg schodzących się na skrzyżowaniu. Na przykład stopień wierzchołka Q wynosi 4.

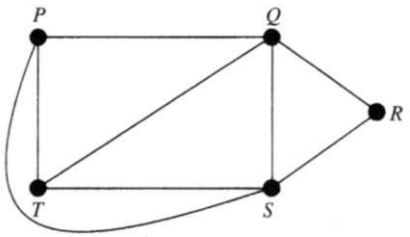


Rysunek 1.3

Graf pokazany na rysunku 1.3 może również opisywać inne sytuacje. Na przykład, jeśli P, Q, R, S i T odpowiadają drużynom piłkarskim, to obecność krawędzi może świadczyć o tym, że mecz, w którym brały udział drużyny odpowiadające końcom tej krawędzi, już się odbył. Tak więc, na podstawie rysunku 1.3 widzimy, że drużyna P grała już z drużynami Q, S oraz T i nie grała z drużyną R. W tej reprezentacji grafu stopień wierzchołka jest liczbą meczów rozegranych przez daną drużynę.

Tę samą sytuację możemy zilustrować inaczej za pomocą grafu z rysunku 1.4. Usunęliśmy na nim „przecięcie" odcinków PS i QT, rysując linię PS na zewnątrz prostokąta $PQST$. Otrzymany graf nadal informuje nas o tym, czy istnieje bezpośrednia droga z jednego skrzyżowania do drugiego, w jaki sposób zostały połączone przewody w obwodzie elektrycznym i które drużyny piłkarskie rozegrały już ze sobą mecze. Jedyna informacja, którą tracimy, dotyczy własności „metrycznych", takich jak długość drogi lub to, czy przewód jest prosty czy zakrzywiony.

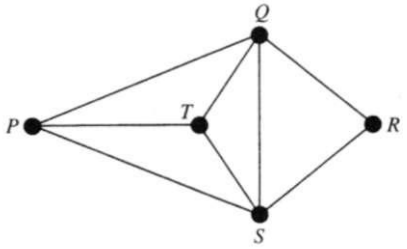
Zatem graf przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje, w jaki sposób są one połączone, nie uwzględnia natomiast własności metrycznych. Z tego powodu, dowolne grafy opisujące tę samą sytuację, takie jak na rysunkach 1.3 i 1.4, traktujemy jako ten sam graf.



Rysunek 1.4

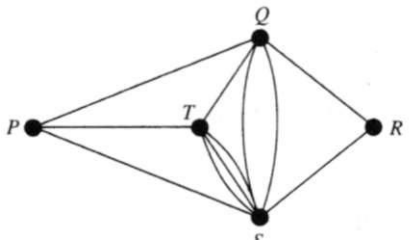
Mówiąc bardziej ogólnie, dwa grafy są identyczne, jeśli dowolne dwa wierzchołki są połączone krawędzią w jednym grafie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im wierzchołki są połączone krawędzią w drugim grafie. Inny graf iden-

tyczny z grafami z rysunków 1.3 i 1.4 jest pokazany na rysunku 1.5. Patrząc na niego, utraciliśmy wszelkie wyobrażenie o położeniu i wzajemnych odległościach punktów, ale nadal na pierwszy rzut oka widzimy, które punkty są połączone drogą lub przewodem.

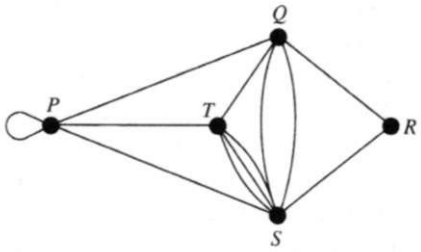


Rysunek 1.5

W grafie pokazanym na powyższym rysunku każdą parę wierzchołków łączy co najwyżej jedna krawędź. Przypuśćmy teraz, że drogi łączące Q i S oraz S i T na rysunku 1.5 są zbyt przeciążone ruchem drogowym. Można temu zaradzić, dobudowując dodatkowe drogi łączące te punkty; otrzymamy sytuację przedstawioną na rysunku 1.6. Krawędzie łączące wierzchołki Q i S oraz S i T nazywamy **krawędziami wielokrotnymi**. Jeśli ponadto potrzebny jest parking dla samochodów w punkcie P, to zaznaczymy go na rysunku za pomocą krawędzi prowadzącej z wierzchołka P do niego samego, nazywanej **pętlą** (patrz rys. 1.7). W tej książce dopuścimy możliwość występowania krawędzi wielokrotnych i pętli w grafach. Grafy bez krawędzi wielokrotnych i pętli, takie jak graf na rysunku 1.5, nazywamy **grafami prostymi**.

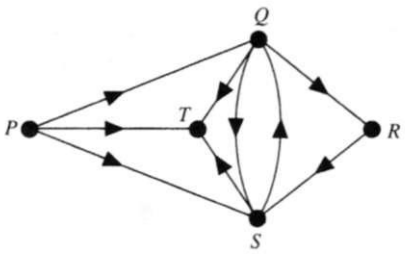


Rysunek 1.6



Rysunek 1.7

Konieczność badania **grafów skierowanych** (po angielsku nazywanych **directed graphs**, w skrócie **digraphs** — stąd używany po polsku skrót **digrafy**) wynika z przekształcania pewnych dróg w ulice jednokierunkowe. Przykład digrafu pokazany jest na rysunku 1.8, kierunki ruchu na ulicach jednokierunkowych zostały zaznaczone na nim strzałkami. (W tym przykładzie w punkcie T



Rysunek 1.8

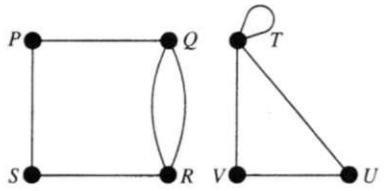
zapanowałby chaos, co jednak nie przeszkadza nam zajmować się również takimi sytuacjami!) Grafami skierowanymi będziemy się zajmować w rozdziale 7.

Znaczna część teorii grafów poświęcona jest różnego rodzaju „trasom". **Trasa** jest to „linia, po której przedostajemy się z jednego wierzchołka do innego", składająca się z ciągu kolejno przechodzonych krawędzi. Na przykład ciąg $P \to Q \to R$ w grafie przedstawionym na rysunku 1.5 jest trasą długości 2, a ciąg $P \to S \to Q \to T \to S \to R$ jest trasą długości 5. Trasę, w której żaden wierzchołek nie występuje więcej niż jeden raz, nazwiemy **drogą**; na przykład $P \to T \to S \to R$ jest drogą. Trasę postaci $Q \to S \to T \to Q$ nazywamy **cyklem**.

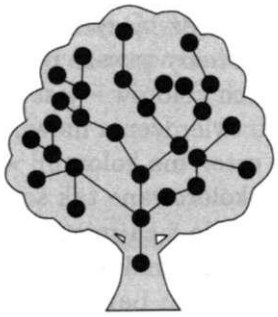
Większa część rozdziału 3 jest poświęcona drogom o specjalnych własnościach. W szczególności, będziemy zajmować się takimi grafami, w których istnieją trasy przechodzące przez każdą krawędź lub przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz i kończące się w punkcie wyjścia; takie grafy nazywamy odpowiednio grafami **eulerowskimi** i **hamiltonowskimi**. Na przykład graf pokazany na rysunkach 1.3–1.5 jest hamiltonowski; odpowiednią trasą jest $P \to Q \to R \to S \to T \to P$. Nie jest on grafem eulerowskim, gdyż dowolna trasa, która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie jeden raz (taka jak $P \to Q \to R \to S \to T \to P \to S \to Q \to T$), musi zakończyć się w wierzchołku różnym od początkowego.

Pewne grafy składają się z dwóch lub większej liczby części. Rozważmy na przykład graf, którego wierzchołkami są stacje metra londyńskiego i nowojorskiego, a jego krawędziami linie metra łączące te stacje. Nie jest możliwe przejechanie z Trafalgar Square do Grand Central Station, poruszając się wyłącznie po krawędziach tego grafu, ale jeśli ograniczymy naszą uwagę tylko do metra londyńskiego, to możemy dostać się z dowolnej stacji do każdej innej. Graf składający się z jednego kawałka, tzn. taki, w którym dowolne dwa wierzchołki można połączyć drogą, nazywamy **grafem spójnym**; graf składający się z wielu kawałków nazywamy **grafem niespójnym** (por. rys. 1.9). Spójnością grafów zajmiemy się w rozdziale 3.

Czasami zajmujemy się grafami spójnymi, w których każdą parę wierzchołków można połączyć dokładnie jedną drogą. Takie grafy nazywamy **drzewami**, biorąc nazwę od drzew genealogicznych; będziemy zajmować się nimi w rozdziale 4. Jak zobaczymy, drzewo można zdefiniować jako graf spójny bez cykli (por. rys. 1.10).



Rysunek 1.9

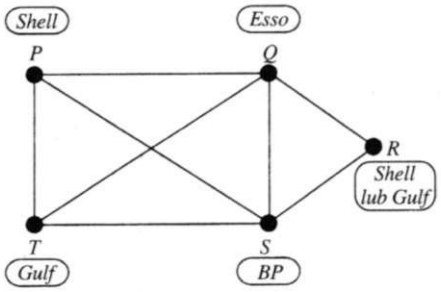


Rysunek 1.10

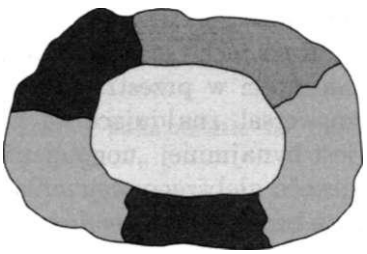
Wcześniej już zauważyliśmy, że graf pokazany na rysunku 1.3 może być narysowany (tak jak na rysunkach 1.4 i 1.5) w ten sposób, by uniknąć przecinania się krawędzi. Graf, który może być narysowany bez takich przecięć, nazywamy **grafem planarnym**. W rozdziale 5 podamy kilka kryteriów planarności. Niektóre z nich odwołują się do własności „podgrafów" badanego grafu, inne wykorzystują podstawowe pojęcie dualności.

Grafy planarne odgrywają ważną rolę w problemach kolorowania. Przypuśćmy, że cztery koncerny Shell, Esso, BP i Gulf chcą rozmieścić pięć stacji benzynowych na pięciu skrzyżowaniach pokazanych na naszym grafie „połączeń drogowych". Ze względów ekonomicznych żaden koncern nie chce budować stacji na sąsiednich skrzyżowaniach. Wtedy Shell może wybudować stację na skrzyżowaniu P, Esso na skrzyżowaniu Q, BP na skrzyżowaniu S i Gulf na skrzyżowaniu T. W ten sposób skrzyżowanie R pozostanie wolne dla koncernu Shell lub Gulf (patrz rys. 1.11). Jeśli jednak Gulf wycofa się z tego porozumienia, to pozostałe trzy koncerny nie będą mogły wybudować swoich stacji benzynowych zgodnie z dotychczasowymi zamierzeniami.

Takimi zagadnieniami zajmiemy się w rozdziale 6. Będziemy tam próbowali kolorować wierzchołki grafu prostego daną z góry liczbą kolorów w taki sposób,



Rysunek 1.11

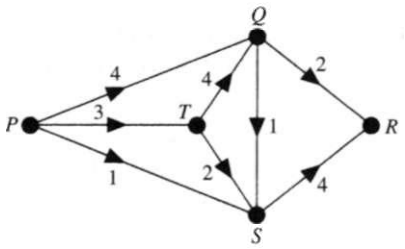


Rysunek 1.12

by każda krawędź łączyła wierzchołki dwóch różnych kolorów. Jeśli graf jest planarny, to możemy zawsze pokolorować w ten sposób jego wierzchołki za pomocą tylko czterech kolorów – jest to słynne **twierdzenie o czterech barwach**. Inna wersja tego twierdzenia mówi, że możemy zawsze pokolorować państwa na dowolnej mapie czterema kolorami w taki sposób, by żadne graniczące ze sobą państwa nie były pokolorowane tak samo (por. rys. 1.12).

W rozdziale 8 zajmiemy się słynnym **problemem kojarzenia małżeństw**, polegającym na znalezieniu warunków, jakie musi spełniać grupa dziewcząt, z których każda zna pewną liczbę chłopców, by każda z nich mogła wyjść za mąż za któregoś ze swoich znajomych. Ten problem może być sformułowany w języku teorii transwersal i jest związany z problemem znalezienia rozłącznych dróg łączących dane dwa wierzchołki grafu lub digrafu.

Rozdział 8 kończą rozważania dotyczące przepływów w sieciach i problemów transportowych. Przypuśćmy, że dana jest sieć połączeń, taka jak na rysunku 1.13, w której P jest fabryką, R jest rynkiem zbytu, a krawędzie grafu są liniami, którymi mogą być przesyłane wyprodukowane dobra. Każda z tych linii przesyłowych ma swoją przepustowość, która jest oznaczona liczbą obok odpowiedniej krawędzi. Ta liczba wyraża maksymalną ilość dóbr, które mogą być przesłane daną linią. Problem polega na wyznaczeniu maksymalnej ilości dóbr, które mogą być przesłane z fabryki na rynek.



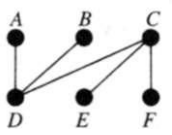
Rysunek 1.13

Ostatni rozdział jest poświęcony matroidom. Wiąże on razem treści poprzednich rozdziałów zgodnie z zasadą „czyń mądrze — uogólniaj!" (ang. „be wise — generalize!"). Teoria matroidów, zajmująca się badaniem zbiorów ze zdefiniowanymi na nich „strukturami niezależności", uogólnia zarówno pojęcie liniowej niezależności w przestrzeniach liniowych, jak i pewne wyniki dotyczące grafów i transwersal, znajdujące się wcześniej w tej książce. Jednakże teoria matroidów nie jest bynajmniej „uogólnieniem dla samego uogólnienia". Przeciwnie, daje ona możliwość głębszego wejrzenia w wiele problemów dotyczących grafów oraz dostarcza prostszych dowodów twierdzeń dotyczących transwersal niż dowody prowadzone metodami tradycyjnymi. Matroidy odegrały ważną rolę w rozwoju pojęć kombinatorycznych w ostatnich latach.

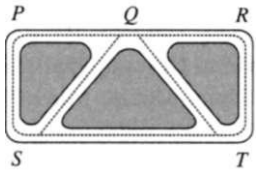
Mamy nadzieję, że ten rozdział wprowadzający wskazał Czytelnikowi, o czym jest ta książka i jakimi zagadnieniami się zajmuje. Teraz rozpoczniemy bardziej formalny wykład.

Ćwiczenia do §1

1.1^r Podaj liczbę wierzchołków i krawędzi oraz stopnie poszczególnych wierzchołków:
(a) w grafie pokazanym na rysunku 1.3,
(b) w drzewie pokazanym na rysunku 1.14.



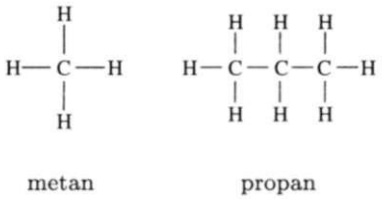
Rysunek 1.14



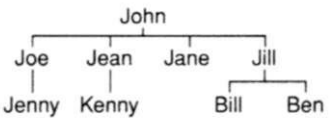
Rysunek 1.15

1.2 Narysuj graf odpowiadający sieci dróg pokazanej na rysunku 1.15 i podaj liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopień każdego wierzchołka.

1.3^r Na rysunku 1.16 widzimy wzory cząsteczek metanu (CH_4) i propanu (C_3H_8).
(a) Jeśli potraktujemy te wzory jako grafy, to co możemy powiedzieć o wierzchołkach odpowiadających atomom węgla (C) i wodoru(H)?
(b) Istnieją dwie różne cząsteczki mające ten sam wzór sumaryczny C_4H_{10}. Narysuj grafy odpowiadające tym cząsteczkom.



Rysunek 1.16

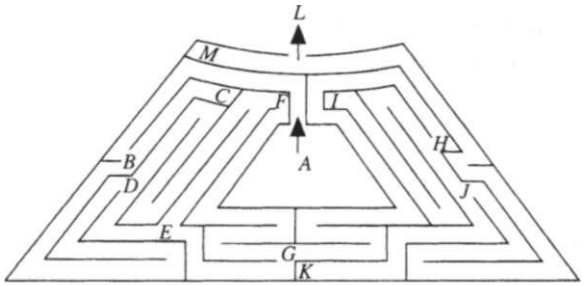


Rysunek 1.17

1.4 Narysuj graf odpowiadający drzewu genealogicznemu pokazanemu na rysunku 1.17.

1.5^r Narysuj graf, którego wierzchołki są oznaczone literami od A do M i który pokazuje trzy drogi poruszania się po labiryncie znajdującym się w Hampton Court i przedstawionym na rysunku 1.18.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA



Rysunek 1.18

1.6^r Maciek lubi Marię, Martę i Magdę; Marek lubi Marię i Magdę; Maria i Marta lubią się nawzajem. Narysuj graf skierowany ukazujący te wzajemne relacje między Maćkiem, Markiem, Marią, Martą i Magdą.

1.7 Węże zjadają żaby, a ptaki zjadają pająki; ptaki i pająki zjadają owady; żaby jedzą ślimaki, pająki i owady. Narysuj graf skierowany reprezentujący te drapieżne zachowania.

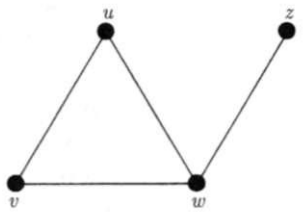
2 Rozdział
Definicje i przykłady

Nienawidzę definicji!
BENJAMIN DISRAELI

Ten rozdział zawiera podstawy do dalszego studiowania teorii grafów. Paragraf 2 formalizuje pewne podstawowe definicje z rozdziału 1, a paragraf 3 dostarcza wielu przykładów. W paragrafie 4 zobaczymy, w jaki sposób można użyć grafów do przedstawienia i rozwiązania trzech zadań matematyki rekreacyjnej. Zajmowanie się poważniejszymi zastosowaniami odłożymy do czasu, gdy będziemy dysponować bardziej zaawansowaną techniką (por. paragrafy 8 i 11).

§2 Definicje

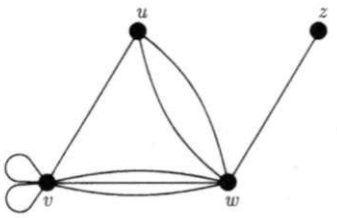
Graf prosty G składa się z niepustego zbioru skończonego $V(G)$, którego elementy nazywamy **wierzchołkami** (lub **węzłami**), i skończonego zbioru $E(G)$ różnych par nieuporządkowanych różnych elementów zbioru $V(G)$, które nazywamy **krawędziami**. Zbiór $V(G)$ nazywamy **zbiorem wierzchołków**, a zbiór $E(G)$ **zbiorem krawędzi** grafu G. Mówimy, że krawędź $\{v, w\}$ **łączy** wierzchołki v i w, i na ogół oznaczamy ją krócej symbolem vw. Na przykład na rysunku 2.1 widzimy graf prosty G, którego zbiorem wierzchołków $V(G)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$ i którego zbiór krawędzi $E(G)$ składa się z krawędzi uv, uw, vw i wz.



Rysunek 2.1

W każdym grafie prostym istnieje co najwyżej jedna krawędź łącząca daną parę wierzchołków. Jednakże wiele wyników dotyczących grafów prostych można

rozszerzyć tak, by dotyczyły obiektów ogólniejszych, w których dwa wierzchołki mogą być połączone więcej niż jedną krawędzią. Ponadto możemy pozbyć się ograniczenia mówiącego, że krawędź łączy dwa *różne* wierzchołki i dopuścić **pętle** — krawędzie łączące wierzchołek z samym sobą. Taki obiekt, w którym mogą występować krawędzie wielokrotne i pętle, nazywamy **grafem ogólnym**, lub po prostu **grafem** (patrz rys. 2.2). Zatem każdy graf prosty jest grafem, ale nie każdy graf jest grafem prostym.



Rysunek 2.2

Zatem graf G składa się z niepustego zbioru skończonego $V(G)$, którego elementy nazywamy **wierzchołkami**, i skończonej rodziny $E(G)$ par nieuporządkowanych (niekoniecznie różnych) elementów zbioru $V(G)$ nazywanych **krawędziami**; użycie słowa „rodzina" oznacza, że dopuszczamy istnienie krawędzi wielokrotnych[1].

Zbiór $V(G)$ nazywamy **zbiorem wierzchołków**, a zbiór $E(G)$ **rodziną krawędzi** grafu G. Mówimy, że krawędź $\{v, w\}$ **łączy** wierzchołki v i w i również w tym przypadku oznaczamy ją krócej symbolem vw. Zatem na rysunku 2.2 zbiorem wierzchołków $V(G)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$, a rodzina $E(G)$ składa się z krawędzi uv, vv (występującej dwukrotnie), vw (występującej trzykrotnie), uw (występującej dwukrotnie) i wz. Zauważmy, że każda pętla vv łączy wierzchołek v z samym sobą. Chociaż czasami musimy ograniczyć uwagę do grafów prostych, to wszędzie tam, gdzie będzie to możliwe, będziemy dowodzić twierdzeń dla grafów ogólnych.

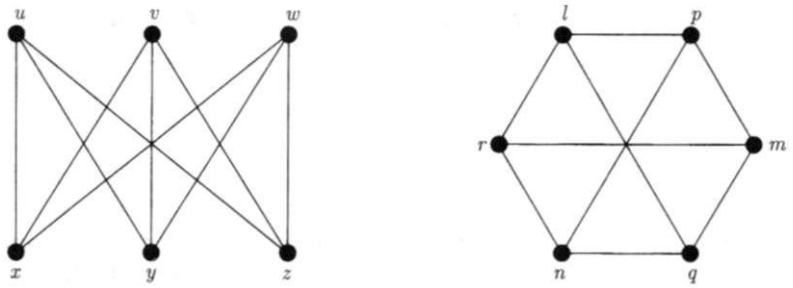
Teoria grafów nie ma ustalonego języka — każdy autor używa swojej terminologii. Niektórzy nazywają grafem to, co my nazywamy grafem prostym, albo graf ze skierowanymi krawędziami, albo graf mający nieskończenie wiele wierzchołków lub krawędzi; grafami skierowanymi będziemy się zajmować w rozdziale 7, a grafami nieskończonymi — w paragrafie 16. Wszystkie takie definicje są całkowicie poprawne, pod warunkiem, że używa się ich konsekwentnie. W tej książce, *wszystkie grafy są skończone i nie są skierowane, z pętlami i krawędziami wielokrotnymi, chyba że zaznaczymy, iż jest inaczej.*

---

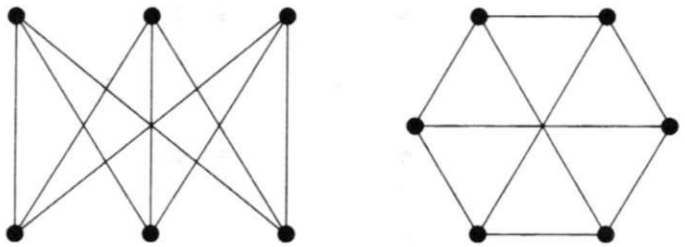
[1] Używamy słowa „rodzina" do oznaczenia zbioru z powtórzeniami, czyli zbiorowości elementów, z których niektóre mogą występować wielokrotnie; na przykład $\{a, b, c\}$ jest zbiorem, ale (a, a, c, b, a, c) jest rodziną.

Izomorfizm

Mówimy, że dwa grafy G_1 i G_2 są **izomorficzne**, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami grafu G_1 i grafu G_2 taka, że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu G_1 jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki grafu G_2. Zatem dwa grafy pokazane na rysunku 2.3 są izomorficzne przy odpowiedniości $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$, $z \leftrightarrow r$. W wielu zadaniach nazwy wierzchołków są niepotrzebne, więc je pomijamy. Mówimy wtedy, że dwa „nieoznakowane grafy" są izomorficzne, jeśli możemy tak przyporządkować nazwy wierzchołkom, by otrzymane „grafy oznakowane" były izomorficzne. Na przykład grafy nieoznakowane na rysunku 2.4 są izomorficzne, gdyż możemy oznakować wierzchołki tak, jak na rysunku 2.3.

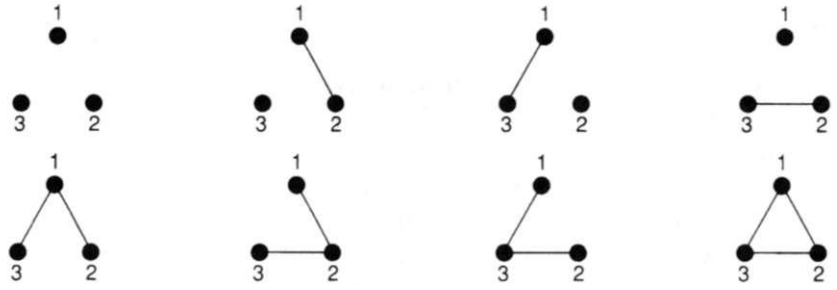


Rysunek 2.3



Rysunek 2.4

Różnica między grafami oznakowanymi i nieoznakowanymi staje się wyraźniejsza, gdy próbujemy je zliczać. Na przykład, jeśli ograniczamy nasze zainteresowanie do grafów mających trzy wierzchołki, to istnieje, z dokładnością do izomorfizmu, osiem różnych grafów oznakowanych, ale tylko cztery grafy nieoznakowane (zob. rysunki 2.5 i 2.6). Zazwyczaj z kontekstu jasno wynika, czy mamy na myśli grafy oznakowane, czy nieoznakowane.

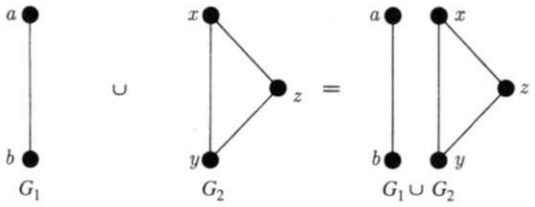


Rysunek 2.5

Rysunek 2.6

Spójność

Możemy połączyć dwa grafy, by otrzymać graf większy. Jeśli tymi dwoma grafami są $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, gdzie zbiory $V(G_1)$ i $V(G_2)$ są rozłączne, to **sumą** tych grafów $G_1 \cup G_2$ jest graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $V(G_1) \cup V(G_2)$, a zbiorem krawędzi zbiór $E(G_1) \cup E(G_2)$ (patrz rys. 2.7).

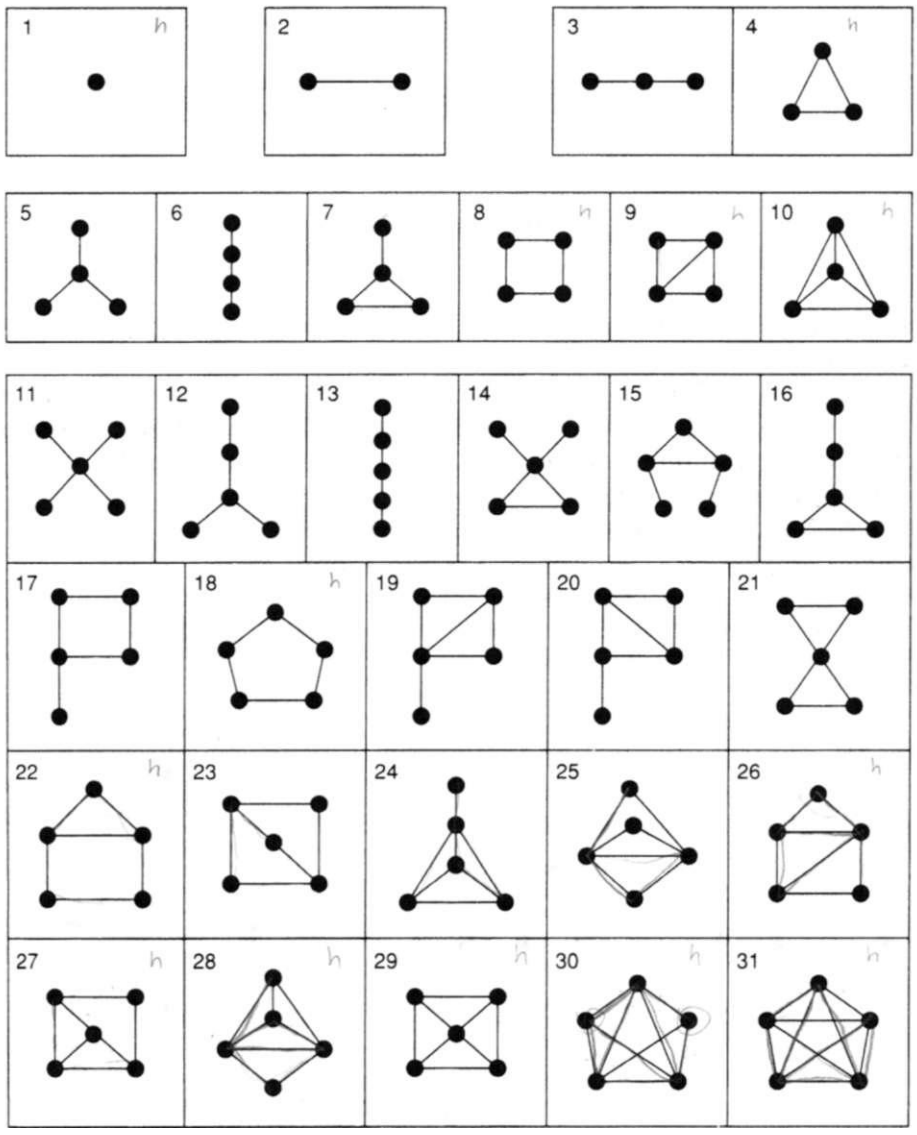


Rysunek 2.7

W większości grafy, z którymi mieliśmy dotychczas do czynienia, składały się „z jednego kawałka". Graf nazywamy **spójnym**, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch grafów — w przeciwnym razie nazywamy go grafem **niespójnym**. Oczywiście każdy graf niespójny G można przedstawić w postaci sumy grafów spójnych, nazywanych **składowymi** grafu G. Na przykład na rysunku 2.8 jest przedstawiony graf mający trzy składowe.

Kiedy dowodzimy ogólnych twierdzeń o grafach, często dowodzimy odpowiedniego twierdzenia dla grafów spójnych i następnie stosujemy je oddzielnie

Rysunek 2.8



Rysunek 2.9

do każdej składowej. W tabeli na rysunku 2.9 widzimy wszystkie spójne grafy nieoznakowane mające co najwyżej pięć wierzchołków.

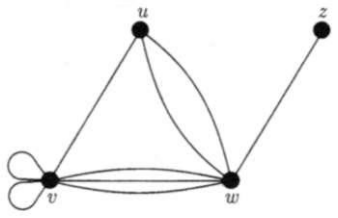
Sąsiedztwo

Mówimy, że dwa wierzchołki v i w grafu G są **sąsiednie**, jeśli istnieje krawędź vw, która je łączy. Mówimy też wtedy, że wierzchołki v i w są **incydentne** z tą krawędzią. Podobnie, dwie krawędzie e i f są **sąsiednie**, jeśli mają wspólny wierzchołek (por. rys. 2.10).

Rysunek 2.10

Stopień wierzchołka v grafu G oznaczany symbolem $\deg(v)$ jest liczbą krawędzi incydentnych z v; przy obliczaniu stopnia wierzchołka v przyjmujemy zwykle, że pętla w wierzchołku v powiększa stopień tego wierzchołka o 2 (a nie o 1). Wierzchołek stopnia 0 nazywamy **wierzchołkiem izolowanym**, a wierzchołek stopnia 1 **wierzchołkiem końcowym**. Zatem każdy z dwóch grafów na rysunku 2.11 ma dwa wierzchołki końcowe i trzy wierzchołki stopnia 2, a graf pokazany na rysunku 2.12 ma jeden wierzchołek końcowy, jeden wierzchołek stopnia 3, jeden wierzchołek stopnia 6 i jeden stopnia 8. **Ciąg stopni** grafu składa się ze stopni wierzchołków w kolejności wzrastającej, przy czym uwzględnione są w nim powtórzenia. Na przykład ciągami stopni grafów z rysunków 2.11 i 2.12 są $(1, 1, 2, 2, 2)$ i $(1, 3, 6, 8)$.

Rysunek 2.11



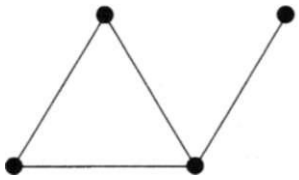
Rysunek 2.12

Zauważmy, że *w każdym grafie suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą* — dokładniej, jest równa podwojonej liczbie krawędzi, gdyż każda krawędź zwiększa tę sumę o 2. Ten fakt wykazany przez Leonharda Eulera w roku

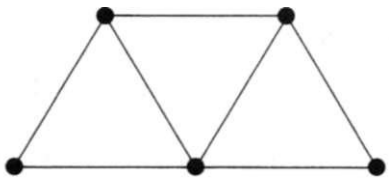
1736 nazywamy **lematem o uściskach dłoni**. Wynika z niego, że jeśli pewne osoby witają się, podając sobie dłonie, to łączna liczba uściśniętych dłoni jest parzysta — dlatego, że w każdym uścisku uczestniczą dokładnie dwie dłonie. Natychmiastowym wnioskiem z lematu o uściskach dłoni jest to, że *w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.*

Podgrafy

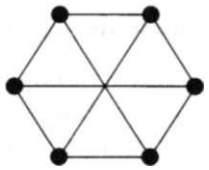
Podgrafem grafu G nazywamy graf, którego wszystkie wierzchołki należą do $V(G)$, a krawędzie należą do $E(G)$. Zatem graf pokazany na rysunku 2.13 jest podgrafem grafu z rysunku 2.14, ale nie jest podgrafem grafu z rysunku 2.15, gdyż ten ostatni graf nie zawiera żadnego „trójkąta".



Rysunek 2.13

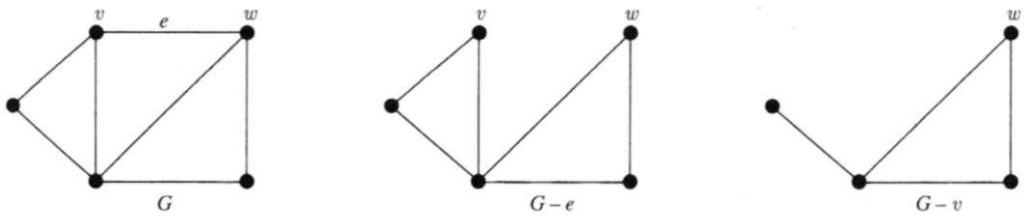


Rysunek 2.14



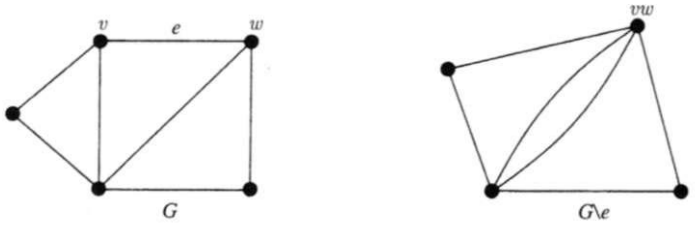
Rysunek 2.15

Możemy otrzymać podgraf danego grafu, usuwając niektóre krawędzie i wierzchołki. Jeśli e jest krawędzią grafu G, to symbolem $G - e$ oznaczymy graf otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi e. Ogólnie, jeśli F jest dowolnym zbiorem krawędzi grafu G, to symbolem $G - F$ oznaczymy graf powstający z grafu G przez usunięcie krawędzi należących do F. Podobnie, jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to symbolem $G - v$ oznaczymy graf powstający z G przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi incydentnych z v. Ogólnie, jeśli S jest dowolnym zbiorem wierzchołków grafu G, to symbolem $G - S$ oznaczymy graf powstający z G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do S i wszystkich krawędzi incydentnych z którymkolwiek z tych wierzchołków. Kilka przykładów widzimy na rysunku 2.16.



Rysunek 2.16

Symbolem $G \setminus e$ oznaczamy graf otrzymany przez ściągnięcie krawędzi e, czyli usunięcie jej i zidentyfikowanie jej końców v i w tak, że otrzymany wierzchołek jest incydentny z tymi krawędziami (różnymi od e), które były incydentne z v lub w. Widzimy przykład na rysunku 2.17.

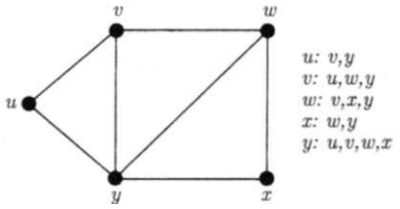


Rysunek 2.17

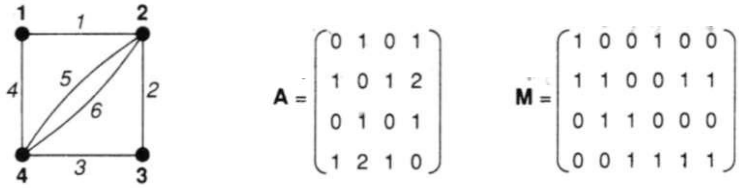
Reprezentacja macierzowa

Chociaż wygodnie jest przedstawiać graf w postaci rysunku, na którym punkty są połączone liniami, to taka reprezentacja może być nieodpowiednia, jeśli chcemy przechować duży graf w pamięci komputera. Jednym ze sposobów zapamiętywania grafu prostego jest podanie listy wierzchołków sąsiednich dla każdego wierzchołka tego grafu. Na rysunku 2.18 widzimy przykład takiej reprezentacji.

Inny przydatny sposób reprezentacji wykorzystuje macierze. Jeśli G jest grafem, którego wierzchołki są oznakowane liczbami ze zbioru $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$, to **macierzą sąsiedztwa A** jest macierz wymiaru $n \times n$, której wyraz o indeksach



Rysunek 2.18



Rysunek 2.19

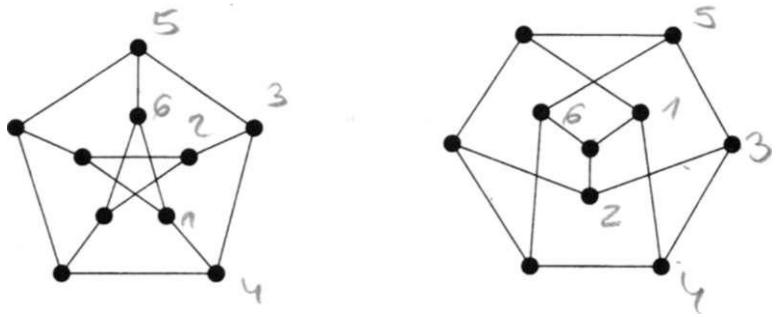
i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i z wierzchołkiem j. Jeśli oznakujemy również krawędzie liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$, to **macierzą incydencji M** nazwiemy macierz wymiaru $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1, jeśli wierzchołek i jest incydentny z krawędzią j, i równy 0 w przeciwnym razie. Na rysunku 2.19 widzimy graf oznakowany G z jego macierzami sąsiedztwa i incydencji.

Ćwiczenia do §2

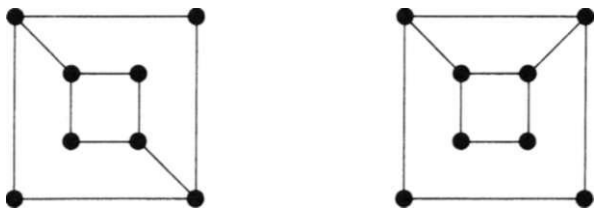
2.1^r Podaj zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi każdego grafu z rysunku 2.3.

2.2 Narysuj:
(a) graf prosty;
(b) graf, który nie jest prosty, ale nie ma pętli;
(c) graf, który nie jest prosty, ale nie ma krawędzi wielokrotnych.
Każdy z nich ma mieć pięć wierzchołków i osiem krawędzi.

2.3^r (a) Oznaczając odpowiednio wierzchołki, wykaż, że dwa grafy pokazane na rysunku 2.20 są izomorficzne.
(b) Wyjaśnij, dlaczego dwa grafy z rysunku 2.21 nie są izomorficzne.



Rysunek 2.20

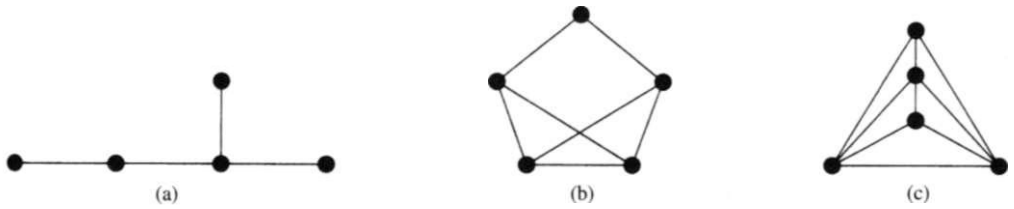


Rysunek 2.21

2.4 Sprawdź, czy następujące zdania są prawdziwe, czy fałszywe:
(a) każde dwa grafy izomorficzne mają ten sam ciąg stopni;
(b) każde dwa grafy mające ten sam ciąg stopni są izomorficzne.

2.5 (a) Wykaż, że istnieje dokładnie $2^{n(n-1)/2}$ oznakowanych grafów prostych mających n wierzchołków.
(b) Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?

2.6^r Umieść każdy z grafów pokazanych na rysunku 2.22 w odpowiednim miejscu tabeli na rysunku 2.9.



Rysunek 2.22

2.7^r Wyznacz ciąg stopni każdego z grafów w tabeli na rysunku 2.9 i sprawdź, że w każdym przypadku lemat o uściskach dłoni jest słuszny.

2.8 (a) Narysuj graf mający sześć wierzchołków i ciąg stopni $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$; czy istnieje graf *prosty* mający takie stopnie?
(b) Jaka będzie odpowiedź na (a) w przypadku ciągu stopni $(2, 3, 3, 4, 5, 5)$?

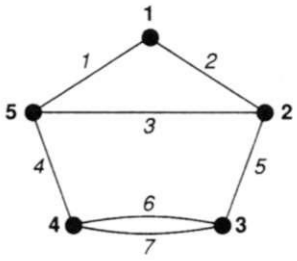
2.9* Udowodnij, że jeśli G jest grafem prostym mającym co najmniej dwa wierzchołki, to G musi zawierać dwa wierzchołki tego samego stopnia lub więcej.

2.10^r Które grafy pokazane na rysunku 2.23 są podgrafami grafów z rysunku 2.20?

Rysunek 2.23

2.11 Niech G będzie grafem mającym n wierzchołków i m krawędzi, niech v będzie wierzchołkiem grafu G stopnia k i niech e będzie krawędzią G. Ile wierzchołków i krawędzi mają grafy $G - e$, $G - v$ i $G \setminus e$?

2.12^r Wyznacz macierze sąsiedztwa i incydencji grafu przedstawionego na rysunku 2.24.



Rysunek 2.24

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rysunek 2.25

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rysunek 2.26

2.13 (a) Narysuj graf, którego macierz sąsiedztwa jest podana na rysunku 2.25.
(b) Narysuj graf, którego macierz incydencji jest podana na rysunku 2.26.

2.14 Jeśli G jest grafem bez pętli, to co możesz powiedzieć o sumie wyrazów
(a) dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny macierzy sąsiedztwa grafu G?
(b) dowolnego wiersza macierzy incydencji grafu G?
(c) dowolnej kolumny macierzy incydencji grafu G?

2.15* Jeśli G jest grafem prostym, którego zbiorem krawędzi jest $E(G)$, to **przestrzenią wektorową** grafu G jest przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{Z}_2$ liczb całkowitych modulo 2, której elementami są podzbiory $E(G)$. Sumą $E+F$ dwóch podzbiorów E i F jest zbiór krawędzi należących do E lub do F, ale nie do obu tych zbiorów jednocześnie, a mnożenie przez skalar jest zdefiniowane wzorami $1 \cdot E = E$ i $0 \cdot E = \emptyset$. Udowodnij, że jest to rzeczywiście przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{Z}_2$ i znajdź jej bazę.

§3 Przykłady

W tym paragrafie zbadamy pewne ważne typy grafów. Czytelnik powinien je poznać, gdyż będą one często występowały w przykładach i zadaniach.

Grafy puste

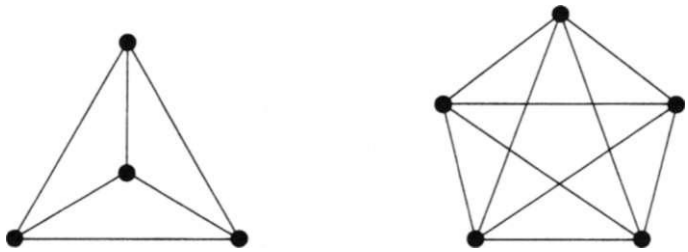
Graf, którego zbiór krawędzi jest zbiorem pustym, nazywamy **grafem pustym**. Graf pusty mający n wierzchołków będziemy oznaczać symbolem N_n; na rysunku

Rysunek 3.1

3.1 widzimy graf N_4. Zauważmy, że każdy wierzchołek grafu pustego jest izolowany. Grafy puste nie są zbyt interesujące.

Grafy pełne

Graf prosty, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona krawędzią, nazywamy **grafem pełnym**. Graf pełny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem K_n; na rysunku 3.2 widzimy grafy K_4 i K_5. Powinniście sprawdzić, że graf K_n ma $n(n-1)/2$ krawędzi.



Rysunek 3.2

Grafy cykliczne, grafy liniowe i koła

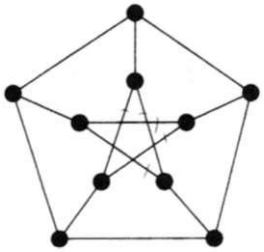
Graf spójny, regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n. Graf otrzymany z grafu C_n przez usunięcie jednej krawędzi nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach

Rysunek 3.3

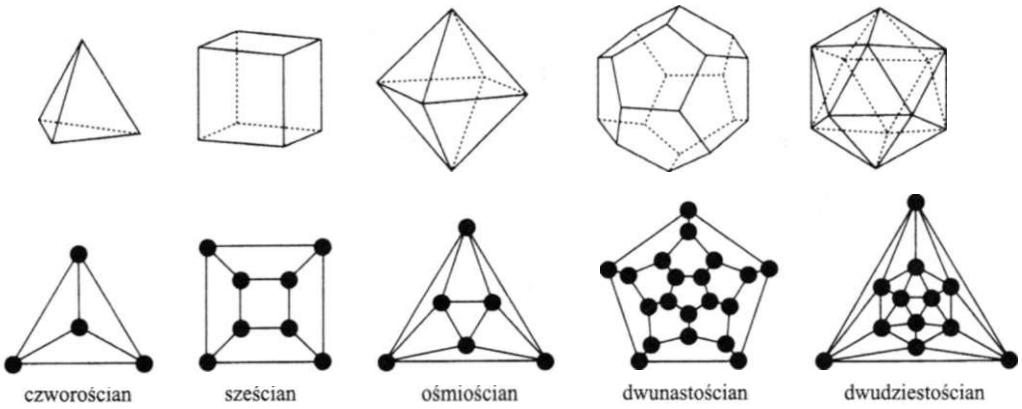
i oznaczamy symbolem P_n. Graf powstający z grafu C_{n-1} przez połączenie każdego wierzchołka z nowym wierzchołkiem v nazywamy **kołem** o n wierzchołkach; oznaczamy je symbolem W_n. Na rysunku 3.3 pokazane są grafy: cykliczny C_6, liniowy P_6 i koło W_6.

Grafy regularne

Graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień, nazywamy **grafem regularnym**. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień r, to ten graf nazywamy **grafem regularnym stopnia** r lub krócej **grafem** r**-regularnym**. Szczególne znaczenie mają **grafy kubiczne**, tzn. grafy regularne stopnia 3; przykładem grafu kubicznego jest **graf Petersena** pokazany na rysunku 3.4. Zauważmy, że graf pusty N_n jest grafem regularnym stopnia 0, graf cykliczny C_n jest grafem regularnym stopnia 2 i graf pełny K_n jest grafem regularnym stopnia $n-1$.



Rysunek 3.4



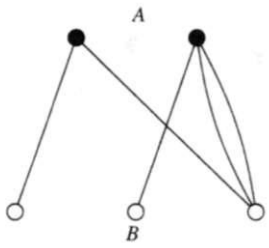
Rysunek 3.5

Grafy platońskie

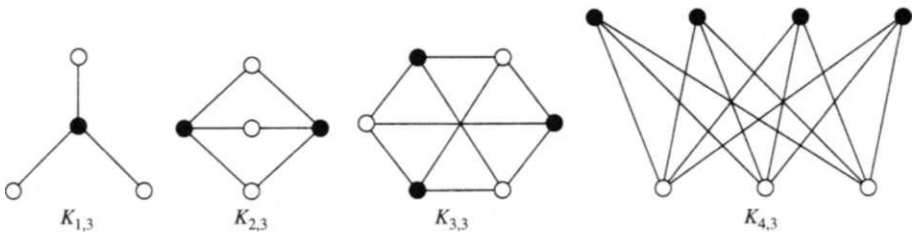
Szczególne miejsce wśród grafów regularnych zajmują **grafy platońskie**, utworzone z wierzchołków i krawędzi pięciu wielościanów foremnych (platońskich) — czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu (patrz rys. 3.5 na stronie 31).

Grafy dwudzielne

Jeśli zbiór wierzchołków grafu G może być podzielony na dwa zbiory rozłączne A i B w taki sposób, by każda krawędź G łączyła wierzchołek zbioru A z wierzchołkiem zbioru B, to taki graf G nazywamy **grafem dwudzielnym** (por. rys. 3.6). Równoważnie, graf dwudzielny to taki graf, którego wierzchołki można pokolorować dwoma kolorami, czarnym i białym, w taki sposób, by każda krawędź łączyła wierzchołek czarny (należący do zbioru A) z wierzchołkiem białym (należącym do zbioru B).



Rysunek 3.6



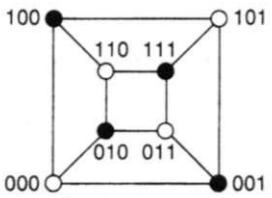
Rysunek 3.7

Graf pełny dwudzielny jest to graf dwudzielny, w którym każdy wierzchołek zbioru A jest połączony dokładnie jedną krawędzią z każdym wierzchołkiem zbioru B. Graf pełny dwudzielny mający r czarnych i s białych wierzchołków

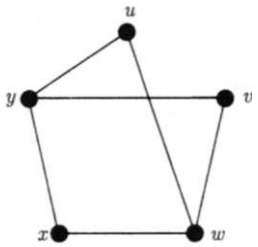
oznaczamy symbolem $K_{r,s}$; grafy $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ i $K_{4,3}$ są pokazane na rysunku 3.7. Powinniście sprawdzić, że graf $K_{r,s}$ ma $r+s$ wierzchołków i rs krawędzi.

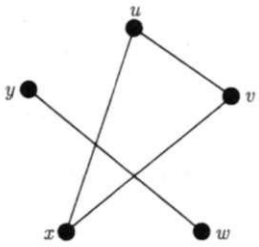
Kostki

Szczególnie ważną rolę wśród regularnych grafów dwudzielnych odgrywają kostki. k-**kostką** Q_k nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają ciągom $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takim, że każdy wyraz a_i jest równy 0 lub 1, i którego krawędzie łączą ciągi różniące się dokładnie jednym wyrazem. Zauważmy, że grafem sześcianu jest graf Q_3 (patrz rys. 3.8). Powinniście sprawdzić, że graf Q_k ma 2^k wierzchołków i $k \cdot 2^{k-1}$ krawędzi oraz jest grafem regularnym stopnia k.



Rysunek 3.8





Rysunek 3.9

Dopełnienie grafu prostego

Jeśli G jest grafem prostym, którego zbiorem wierzchołków jest $V(G)$, to **dopełnieniem** $\overline{G}$ grafu G jest graf prosty, którego zbiorem wierzchołków jest $V(G)$ i w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy *nie* są sąsiednie w grafie G. Na przykład na rysunku 3.9 widzimy graf i jego dopełnienie. Zauważmy, że dopełnieniem grafu pełnego jest graf pusty, a dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego jest suma dwóch grafów pełnych.

Ćwiczenia do §3

3.1^r Narysuj następujące grafy:
(a) graf pusty N_5,
(b) graf pełny K_6,
(c) graf pełny dwudzielny $K_{2,4}$,
(d) sumę grafów $K_{1,3}$ i W_4,
(e) dopełnienie grafu cyklicznego C_4.

3.2^r Ile krawędzi ma każdy z następujących grafów:
(a) K_{10},
(b) $K_{5,7}$,
(c) Q_4,
(d) W_8,
(e) graf Petersena?

3.3 Ile wierzchołków i krawędzi ma każdy z grafów platońskich?

3.4^r Znajdź w tabeli na rysunku 2.9 wszystkie grafy regularne i grafy dwudzielne.

3.5 Podaj przykład (o ile istnieje) następujących grafów:
(a) grafu dwudzielnego regularnego stopnia 5;
(b) dwudzielnego grafu platońskiego;
(c) grafu pełnego będącego kołem;
(d) grafu kubicznego mającego 11 wierzchołków;
(e) grafu regularnego stopnia 4, różnego od K_4, $K_{4,4}$ i Q_4.

3.6^r Narysuj wszystkie proste grafy kubiczne mające co najwyżej 8 wierzchołków.

3.7 **Graf pełny trójdzielny** $K_{r,s,t}$ składa się z trzech zbiorów wierzchołków (mających odpowiednio r, s i t elementów), a jego krawędzie łączą dwa wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy te wierzchołki leżą w różnych zbiorach. Narysuj grafy $K_{2,2,2}$ i $K_{3,3,2}$ oraz wyznacz liczbę krawędzi grafu $K_{3,4,5}$.

3.8 Graf prosty izomorficzny ze swoim dopełnieniem nazywamy grafem **samodopełniającym**.
(a) Udowodnij, że jeśli graf G jest samodopełniający, to ma $4k$ lub $4k+1$ wierzchołków, gdzie k jest liczbą całkowitą.
(b) Wyznacz wszystkie grafy samodopełniające mające 4 i 5 wierzchołków.
(c) Znajdź graf samodopełniający mający 8 wierzchołków.

3.9* **Grafem krawędziowym** $L(G)$ grafu prostego G nazywamy graf, którego wierzchołki stoją we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z *krawędziami* grafu G i taki, że jego wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie grafu G są sąsiednie.
(a) Pokaż, że grafy K_3 i $K_{1,3}$ mają ten sam graf krawędziowy.
(b) Pokaż, że graf krawędziowy czworościanu jest grafem ośmiościanu.
(c) Udowodnij, że jeśli graf G jest grafem regularnym stopnia k, to jego graf krawędziowy $L(G)$ jest grafem regularnym stopnia $2k-2$.
(d) Wyznacz wzór na liczbę krawędzi grafu $L(G)$ w zależności od stopni wierzchołków grafu G.
(e) Wykaż, że graf $L(K_5)$ jest dopełnieniem grafu Petersena.

3.10* **Automorfizmem** φ grafu prostego G nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne zbioru wierzchołków G w ten sam zbiór o tej własności, że wierzchołki

$\varphi(v)$ i $\varphi(w)$ są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy v i w są sąsiednie. **Grupą automorfizmów** $\Gamma(G)$ grafu G nazywamy grupę wszystkich automorfizmów G ze składaniem jako działaniem grupowym.

(a) Udowodnij, że grupy $\Gamma(G)$ i $\Gamma(\overline{G})$ są izomorficzne.

(b) Wyznacz grupy $\Gamma(K_n)$, $\Gamma(K_{r,s})$ i $\Gamma(C_n)$.

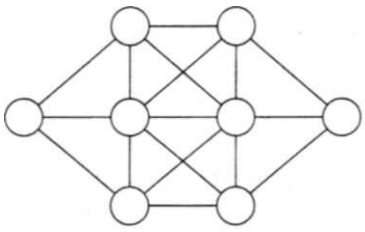
(c) Wykorzystaj ćwiczenia (a) i (b) oraz ćwiczenie 3.9(e) do wyznaczenia grupy automorfizmów grafu Petersena.

§4 Trzy łamigłówki

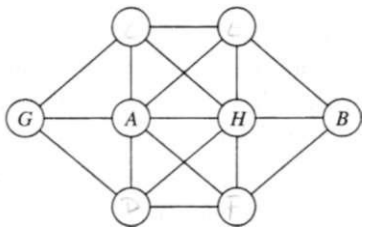
W tym paragrafie pokażemy trzy łamigłówki, do rozwiązania których można wykorzystać pomysły z teorii grafów. Zwróć uwagę na to, że w każdej z tych łamigłówek narysowanie odpowiedniego grafu ułatwia zrozumienie problemu.

Zadanie o ośmiu kółkach

Umieść litery A, B, C, D, E, F, G, H w ośmiu kółkach na rysunku 4.1 w taki sposób, by żadna litera nie sąsiadowała z literą występującą bezpośrednio po niej w alfabecie.



Rysunek 4.1



Rysunek 4.2

Zauważmy najpierw, że próbowanie wszystkich możliwości nie jest rozwiązaniem praktycznym, gdyż istnieje $8! = 40\ 320$ sposobów rozmieszczenia ośmiu liter w ośmiu kółkach. Potrzebujemy zatem bardziej systematycznego podejścia do problemu.

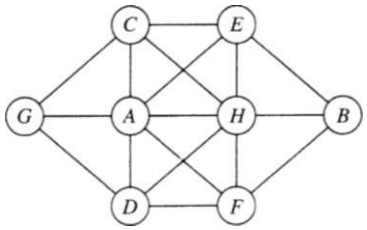
Zauważmy, że:

(1) najłatwiej umieścić litery A i H, gdyż każda z nich ma tylko jedną literę, z którą nie może sąsiadować (mianowicie B i G, odpowiednio);

(2) najtrudniej wypełnić kółka w środku, gdyż każde sąsiaduje z sześcioma innymi.

To sugeruje, by umieścić litery A i H w środkowych kółkach. Jeśli umieścimy literę A na lewo od H, to jedynymi możliwymi miejscami dla B i G będą miejsca pokazane na rysunku 4.2.

Literę C należy teraz umieścić w lewej części rysunku, a F w prawej. Teraz już łatwo umieścić pozostałe litery tak, jak na rysunku 4.3.



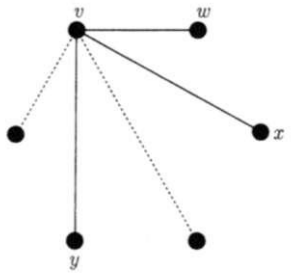
Rysunek 4.3

Sześć osób na przyjęciu

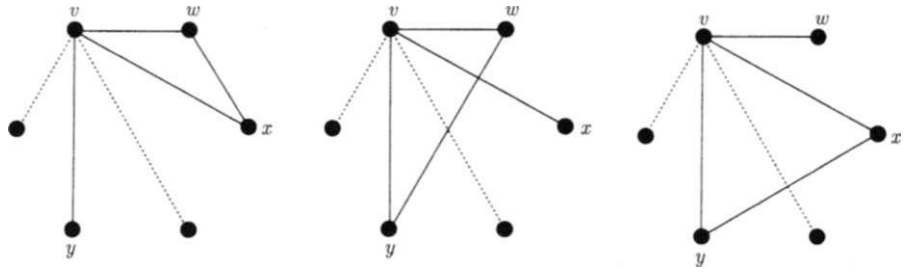
Udowodnij, że w dowolnej grupie sześciu osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy osoby, z których żadna nie zna pozostałych dwóch.

Aby rozwiązać to zadanie, narysujemy graf, w którym wierzchołki będą reprezentować osoby i dwa wierzchołki będą połączone linią ciągłą, jeśli odpowiednie osoby znają się, a linią przerywaną, jeśli się nie znają. Musimy wykazać, że zawsze istnieje trójkąt narysowany linią ciągłą lub trójkąt narysowany linią przerywaną.

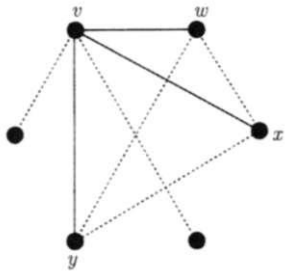
Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem. Wtedy musi istnieć dokładnie pięć krawędzi incydentnych z v, ciągłych lub przerywanych, a więc co najmniej trzy z nich muszą być tego samego typu. Przypuśćmy, że istnieją trzy ciągłe krawędzie (patrz rys. 4.4); przypadek, gdy istnieją trzy krawędzie przerywane, jest analogiczny.



Rysunek 4.4



Rysunek 4.5



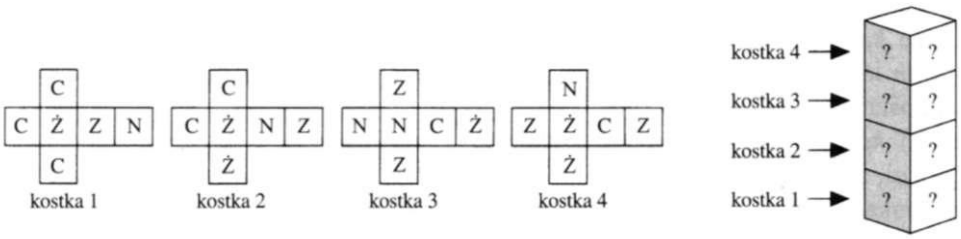
Rysunek 4.6

Jeśli osoby odpowiadające wierzchołkom w i x znają się, to wierzchołki v, w i x tworzą trójkąt narysowany linią ciągłą, co zakończy dowód. Podobnie, jeśli osoby odpowiadające wierzchołkom w i y lub wierzchołkom x i y znają się, to znów otrzymamy trójkąt narysowany linią ciągłą. Te trzy przypadki są pokazane na rysunku 4.5.

Wreszcie, jeśli żadne dwie osoby odpowiadające wierzchołkom w, x i y nie znają się, to wierzchołki w, x i y tworzą trójkąt narysowany linią przerywaną, co kończy dowód (por. rys. 4.6).

Zadanie o czterech kostkach

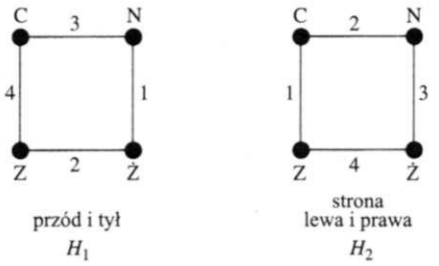
Ten paragraf zakończymy łamigłówką, która kiedyś była popularna pod nazwą *Instant Insanity.*



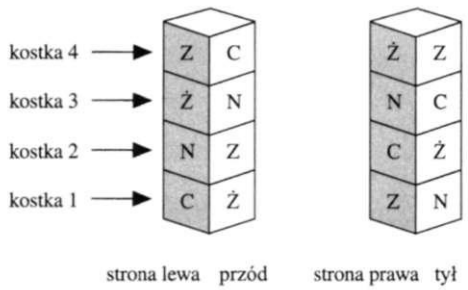
Rysunek 4.7

(c) *każdy podgraf jest grafem regularnym stopnia 2*; stąd wyniknie, że każdy kolor pojawi się dokładnie dwa razy na ściankach przedniej i tylnej (po jednym razie na każdej) i dokładnie dwa razy na ściankach bocznych (po jednym razie na każdej).

Te podgrafy dla naszego konkretnego przykładu są pokazane na rysunku 4.10, a rozwiązanie zadania może być odczytane z tych podgrafów tak, jak na rysunku 4.11.



Rysunek 4.10



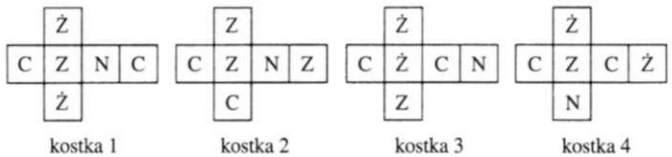
Rysunek 4.11

Ćwiczenia do §4

4.1^r Znajdź inne rozwiązanie zadania o ośmiu kółkach.

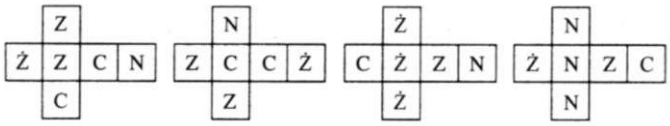
4.2^r Pokaż, że istnieje taka grupa pięciu osób, w której nie ma ani trzech osób znających się nawzajem, ani trzech osób takich, że żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

4.3^r Znajdź rozwiązanie zadania o czterech kostkach dla zestawu kostek pokazanego na rysunku 4.12.



Rysunek 4.12

4.4 Pokaż, że zadanie o czterech kostkach dla zestawu kostek pokazanego na rysunku 4.13 nie ma rozwiązania.



kostka 1 kostka 2 kostka 3 kostka 4

Rysunek 4.13

4.5* Udowodnij, że podane w tekście rozwiązanie zadania o czterech kostkach jest jedynym rozwiązaniem dla tego zestawu kostek.

3 Rozdział
Drogi i cykle

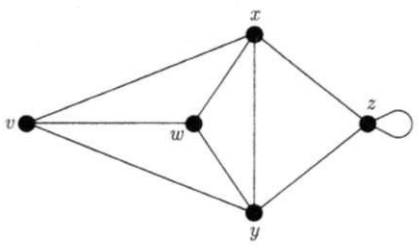
... Tak wiele dróg się wije,
choć świat jedynie oczekuje,
by miłym być.

ELLA WHEELER WILCOX

Teraz, gdy znamy wiele przykładów grafów, możemy przyjrzeć się ich własnościom. Na początek potrzebujemy pewnych pojęć opisujących sposoby „przechodzenia z jednego wierzchołka do innego". Definicje tych pojęć poznamy w paragrafie 5 i tam też udowodnimy pewne fakty dotyczące spójności. W paragrafach 6 i 7 zajmiemy się dwoma szczególnymi typami grafów — grafami mającymi ścieżki zawierające wszystkie krawędzie oraz grafami mającymi cykle przechodzące przez wszystkie wierzchołki. Ostatni w tym rozdziale paragraf 8 jest poświęcony pewnym zastosowaniom dróg i cykli.

§5 Spójność

Trasą (lub **marszrutą**) w danym grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi postaci $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$, zapisywany również w postaci $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$, w którym każde dwie kolejne krawędzie są albo sąsiednie, albo identyczne. Taka trasa wyznacza ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots, v_m$. Wierzchołek v_0 nazywamy **wierzchołkiem początkowym**, a wierzchołek v_m **wierzchołkiem końcowym** trasy; mówimy też wtedy o **trasie od wierzchołka v_0 do wierzchołka v_m**. Liczbę krawędzi na trasie nazywamy **długością trasy**; na przykład ciąg $v \to w \to x \to y \to z \to z \to y \to w$ na rysunku 5.1 jest trasą długości 7 od wierzchołka v do wierzchołka w.

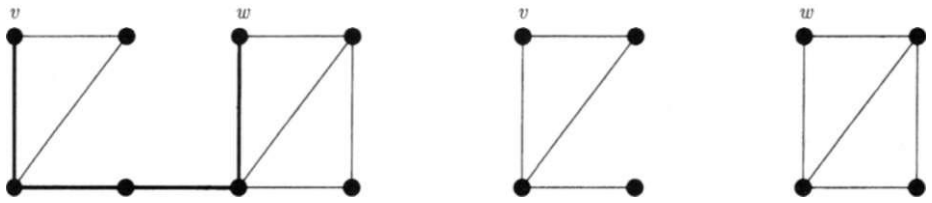


Rysunek 5.1

Pojęcie trasy jest na ogół zbyt ogólne jak na nasze potrzeby, wprowadzimy więc pewne ograniczenia. Trasę, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy **ścieżką**. Jeśli ponadto wierzchołki $v_0, v_1, \ldots, v_m$ są różne (z wyjątkiem, być może, równości $v_0 = v_m$), to ścieżkę nazwiemy **drogą**. Droga lub ścieżka jest **zamknięta**, jeśli $v_0 = v_m$, a ścieżkę zamkniętą zawierającą co najmniej jedną krawędź nazywamy **cyklem**. Zauważmy, że każda pętla lub para krawędzi wielokrotnych jest cyklem.

Aby wyjaśnić te pojęcia, przyjrzyjmy się rysunkowi 5.1. Zobaczymy, że trasa $v \to w \to x \to y \to z \to z \to x$ jest ścieżką, trasa $v \to w \to x \to y \to z$ drogą, trasa $v \to w \to x \to y \to z \to x \to v$ ścieżką zamkniętą, a trasa $v \to w \to x \to y \to v$ cyklem. Cykl długości 3, taki jak $v \to w \to x \to v$, nazywamy **trójkątem**.

Zauważmy, że graf jest **spójny** wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków jest połączona drogą (por. rys. 5.2).



Rysunek 5.2

Zauważmy też, że G jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w G ma długość parzystą. Udowodnimy teraz połowę tego twierdzenia, pozostawiając drugą połowę Czytelnikowi (zob. ćwiczenie 5.3).

TWIERDZENIE 5.1. *Jeśli G jest grafem dwudzielnym, to każdy cykl w G ma długość parzystą.*

Dowód. Ponieważ graf G jest dwudzielny, więc możemy podzielić jego zbiór wierzchołków na dwa zbiory rozłączne A i B w taki sposób, by każda krawędź grafu G łączyła wierzchołek ze zbioru A z wierzchołkiem ze zbioru B. Niech $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_m \to v_0$ będzie cyklem w grafie G i załóżmy (bez straty ogólności), że wierzchołek v_0 należy do zbioru A. Wtedy wierzchołek v_1 należy do zbioru B, v_2 należy do A i tak dalej. Ponieważ wierzchołek v_m musi należeć do zbioru B, cykl ma długość parzystą. ∎

Zbadamy teraz, jakie mogą być ograniczenia liczby krawędzi spójnego grafu prostego mającego n krawędzi. Taki graf ma najmniej krawędzi wtedy, gdy nie ma cykli, a najwięcej wtedy, gdy jest grafem pełnym. Stąd wynika, że liczba krawędzi

musi być zawarta między $n-1$ a $n(n-1)/2$. Co więcej, udowodnimy twierdzenie silniejsze, którego szczególnym przypadkiem jest to ograniczenie.

TWIERDZENIE 5.2. *Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków. Jeśli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówności*

$$n-k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2.$$

Dowód. Udowodnimy prawdziwość dolnego ograniczenia $m \geq n-k$ przez indukcję względem liczby krawędzi grafu G. Dla grafu pustego ta nierówność jest trywialna. Jeśli graf G ma najmniejszą możliwą liczbę krawędzi (powiedzmy m_0), to usunięcie którejkolwiek krawędzi powoduje zwiększenie liczby składowych o 1 i powstały w ten sposób graf ma n wierzchołków, $k+1$ składowych oraz m_0-1 krawędzi. Z założenia indukcyjnego wynika, że $m_0-1 \geq n-(k+1)$, skąd otrzymujemy $m_0 \geq n-k$, czego należało dowieść.

Aby dowieść ograniczenia górnego, możemy założyć, że każda składowa grafu G jest grafem pełnym. Przypuśćmy zatem, że istnieją dwie składowe C_i oraz C_j mające odpowiednio n_i i n_j wierzchołków, przy czym $n_i \geq n_j \geq 1$. Jeśli zastąpimy składowe C_i oraz C_j grafami pełnymi mającymi odpowiednio n_i+1 i n_j-1 wierzchołków, to całkowita liczba wierzchołków nie zmieni się, a liczba krawędzi zmieni się o wielkość

$$\big((n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\big)/2 - \big(n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)\big)/2 = n_i - n_j + 1,$$

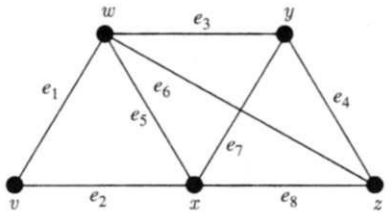
która jest liczbą dodatnią. Wynika stąd, że aby graf G miał maksymalną liczbę krawędzi, musi składać się z grafu pełnego mającego $n-k+1$ wierzchołków i z $k-1$ wierzchołków izolowanych. Stąd wynika teza twierdzenia. ∎

WNIOSEK 5.3. *Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $(n-1)(n-2)/2$ krawędzi, jest spójny.*

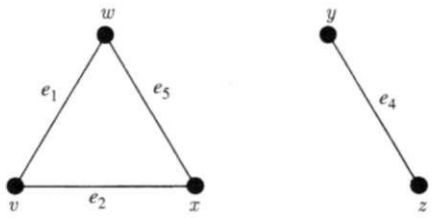
Inne podejście do badania grafów spójnych polega na zadaniu pytania „jak bardzo spójny jest graf spójny?" Jednym z możliwych sposobów rozumienia tego pytania jest zapytanie o to, ile krawędzi lub wierzchołków należy usunąć z grafu, by stał się on niespójny. Zakończymy ten paragraf paroma definicjami pojęć użytecznych w badaniu takich zagadnień.

Zbiorem rozspajającym grafu spójnego G nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie spowoduje, że graf G przestanie być spójny. Na przykład w grafie pokazanym na rysunku 5.3 oba zbiory $\{e_1, e_2, e_5\}$ i $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ są zbiorami rozspajającymi; graf niespójny, powstały po usunięciu drugiego z tych zbiorów, jest pokazany na rysunku 5.4.

Definiujemy następnie **rozcięcie** jako zbiór rozspajający, którego żaden podzbiór właściwy nie jest już zbiorem rozspajającym. W powyższym przykładzie tylko drugi ze zbiorów rozspajających jest rozcięciem. Zauważmy, że usunięcie

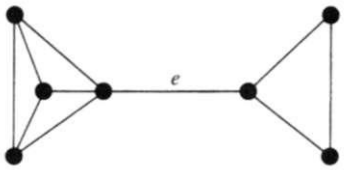


Rysunek 5.3



Rysunek 5.4

krawędzi należących do pewnego rozcięcia zawsze powoduje powstanie grafu mającego dokładnie dwie składowe. Jeśli rozcięcie składa się z jednej krawędzi e, to tę krawędź nazywamy **mostem** (patrz rys. 5.5).



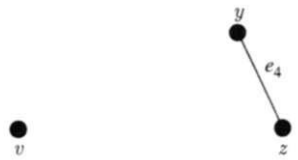
Rysunek 5.5

Definicje tych pojęć można łatwo rozszerzyć na grafy niespójne. Jeśli G jest takim grafem, to **zbiorem rozspajającym** grafu G nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie zwiększa liczbę składowych grafu G, a **rozcięciem** grafu G nazywamy zbiór rozspajający, którego żaden podzbiór właściwy nie jest zbiorem rozspajającym.

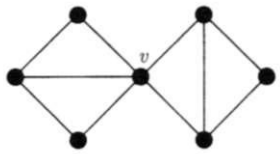
Jeśli graf G jest spójny, to jego **spójnością krawędziową** $\lambda(G)$ nazywamy liczbę krawędzi należących do najmniej licznego rozcięcia grafu G. Zatem $\lambda(G)$ jest najmniejszą liczbą krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny. Na przykład, jeśli graf G jest grafem pokazanym na rysunku 5.3, to $\lambda(G) = 2$ i odpowiednim rozcięciem jest zbiór $\{e_1, e_2\}$. Mówimy też, że graf G jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $\lambda(G) \geq k$. Zatem graf przedstawiony na rysunku 5.3 jest 1-spójny krawędziowo i 2-spójny krawędziowo, ale nie jest 3-spójny krawędziowo.

Potrzebujemy również analogicznych pojęć dotyczących usuwania wierzchołków. **Zbiorem rozdzielającym** grafu spójnego G nazywamy zbiór wierzchołków, których usunięcie powoduje, że ten graf przestaje być spójny; przypomnijmy, że jeśli usuwamy wierzchołek, to usuwamy również wszystkie krawędzie z nim incydentne. Na przykład w grafie G pokazanym na rysunku 5.3 zbiory $\{w, x\}$ i $\{w, x, y\}$ są zbiorami rozdzielającymi; graf powstały z grafu G po usunięciu wierzchołków należących do pierwszego z tych zbiorów jest pokazany na rysunku

5.6. Jeśli zbiór rozdzielający składa się z jednego tylko wierzchołka v, to ten wierzchołek nazywamy **wierzchołkiem rozcinającym** (patrz rys. 5.7). Podobnie jak wyżej, przenosimy te definicje na przypadek grafów niespójnych.



Rysunek 5.6



Rysunek 5.7

Jeśli graf G jest spójny i nie jest grafem pełnym, to jego **spójnością** (wierzchołkową) $\kappa(G)$ nazywamy liczbę elementów najmniej licznego zbioru rozdzielającego. Zatem $\kappa(G)$ jest najmniejszą liczbą wierzchołków, które należy usunąć, by graf powstały w ten sposób z grafu G nie był spójny. Na przykład, jeśli graf G jest grafem pokazanym na rysunku 5.3, to $\kappa(G) = 2$ i odpowiednim zbiorem rozdzielającym jest zbiór $\{w, x\}$. Mówimy również, że graf G jest **k-spójny**, jeśli $\kappa(G) \geq k$. Zatem graf z rysunku 5.3 jest 1-spójny i jest 2-spójny, ale nie jest 3-spójny. Można udowodnić, że jeśli G jest dowolnym grafem spójnym, to $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Na koniec zauważmy, że istnieją uderzające i nieoczekiwane podobieństwa między własnościami cykli i rozcięć. Przykłady tych podobieństw można zaobserwować w ćwiczeniach 5.11, 5.12, 5.13, 6.8 i 9.10. Przyczyny takiego stanu rzeczy ujawnimy w rozdziale 9 i wszystko wtedy stanie się jasne!

Ćwiczenia do §5

5.1^r Znajdź w grafie Petersena
(a) ścieżkę długości 5,
(b) drogę długości 9,
(c) cykle długości 5, 6, 8 i 9,
(d) rozcięcia składające się z 3, 4 i 5 krawędzi.

5.2^r **Obwodem** grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie. Wyznacz obwód grafu
(a) K_9,
(b) $K_{5,7}$,
(c) C_8,
(d) W_8,
(e) Q_5,
(f) Petersena,
(g) dwunastościanu.

5.3 Udowodnij twierdzenie odwrotne do twierdzenia 5.1, które mówi, że jeśli każdy cykl w grafie G ma długość parzystą, to ten graf jest grafem dwudzielnym.

5.4^r Udowodnij, że graf prosty i jego dopełnienie nie mogą jednocześnie być niespójne.

5.5^r Wyznacz liczby $\kappa(G)$ i $\lambda(G)$ dla następujących grafów G:
(a) C_6,
(b) W_6,
(c) $K_{4,7}$,
(d) Q_4.

5.6 (a) Wykaż, że jeśli graf G jest spójny i minimalny stopień wierzchołka wynosi k, to $\lambda(G) \leq k$.
(b) Narysuj graf G, w którym minimalny stopień wierzchołka wynosi k i taki, że $\kappa(G) < \lambda(G) < k$.

5.7 (a) Udowodnij, że graf jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków znajduje się w tym samym cyklu.
(b) Sformułuj podobne twierdzenie dla grafów 2-spójnych krawędziowo.

5.8 Niech G będzie grafem spójnym, którego zbiorem wierzchołków jest $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, i mającym m krawędzi i t trójkątów.
(a) Udowodnij, że jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą sąsiedztwa grafu G, to liczba tras długości 2 z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j jest równa wyrazowi o indeksach i, j macierzy $\mathbf{A}^2$.
(b) Wyprowadź stąd wniosek, że suma wyrazów stojących na przekątnej macierzy $\mathbf{A}^2$ wynosi $2m$.
(c) Wyznacz liczbę tras długości 3 prowadzących z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j i wywnioskuj z niej, że suma wyrazów stojących na przekątnej macierzy $\mathbf{A}^3$ jest równa $6t$.

5.9 **Odległością** $d(v, w)$ wierzchołka v od wierzchołka w w grafie spójnym nazywamy długość najkrótszej drogi prowadzącej z v do w.
(a) Wykaż, że jeśli $d(v, w) \geq 2$, to istnieje wierzchołek z taki, że $d(v, z) + d(z, w) = d(v, w)$.
(b) Wykaż, że w grafie Petersena $d(v, w) = 1$ lub $d(v, w) = 2$ dla dowolnej pary różnych wierzchołków v i w.

5.10* Niech G będzie grafem prostym, który ma $2k$ wierzchołków i nie zawiera trójkątów. Wykaż za pomocą indukcji względem k, że graf G ma co najwyżej k^2 krawędzi i podaj przykład grafu, dla którego to ograniczenie górne jest przyjmowane. (To twierdzenie jest nazywane *twierdzeniem ekstremalnym Turána.*)

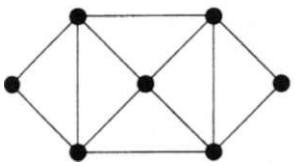
5.11* (a) Udowodnij, że jeśli dwa różne cykle w grafie G zawierają tę samą krawędź e, to w grafie G istnieje cykl nie zawierający e.
(b) Udowodnij podobne twierdzenie dla rozcięć zamiast cykli.

5.12* (a) Udowodnij, że jeśli C jest cyklem i C^* rozcięciem w grafie spójnym G, to C i C^* mają parzystą liczbę wspólnych krawędzi.
(b) Udowodnij, że jeśli pewien zbiór S krawędzi grafu G ma parzystą liczbę wspólnych krawędzi z każdym rozcięciem grafu G, to zbiór S może być podzielony na cykle o rozłącznych zbiorach krawędzi.

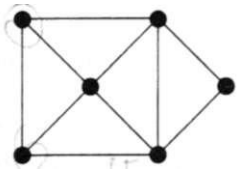
5.13* Podzbiór E zbioru krawędzi grafu G nazywamy zbiorem **niezależnym**, jeśli E nie zawiera żadnego cyklu. Udowodnij, że:
(a) każdy podzbiór zbioru niezależnego jest zbiorem niezależnym;
(b) jeśli I i J są niezależnymi zbiorami krawędzi oraz $|I| > |J|$, to istnieje krawędź e należąca do zbioru J i nie należąca do zbioru I taka, że zbiór $I \cup \{e\}$ jest niezależny.
Wykaż, że twierdzenia (a) i (b) są prawdziwe również wtedy, gdy zastąpimy słowo „cykl" słowem „rozcięcie".

§6 Grafy eulerowskie

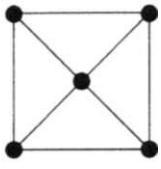
Graf spójny G nazywamy **grafem eulerowskim**, jeśli istnieje zamknięta ścieżka zawierająca każdą krawędź G. Taką ścieżkę nazywamy **cyklem Eulera**[1]. Zauważmy, że ta definicja wymaga, by cykl Eulera przechodził przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Graf, który nie jest grafem eulerowskim, nazwiemy grafem **półeulerowskim**, jeśli istnieje ścieżka zawierająca każdą krawędź grafu G. Na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3 widzimy przykłady grafów: eulerowskiego, półeulerowskiego oraz grafu, który nie jest grafem eulerowskim.



Rysunek 6.1



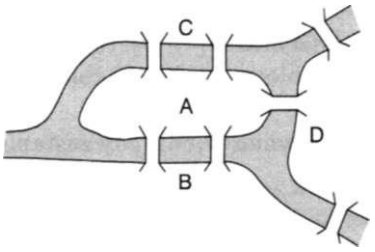
Rysunek 6.2



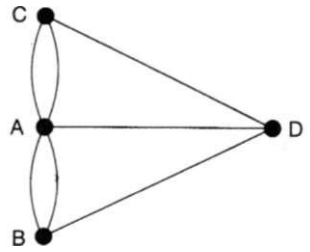
Rysunek 6.3

[1] Jest to pewna niekonsekwencja: od cyklu żądaliśmy, by był drogą, tzn. by nie przechodził przez żaden wierzchołek więcej niż jeden raz, co nie musi mieć miejsca w przypadku cykli Eulera. Jednak ta nazwa jest tak często używana, że należało uczynić ten wyjątek. (przyp. tłum.)

Zadania dotyczące grafów eulerowskich często występują w książkach z rozrywkami matematycznymi. Takie zadanie może polegać na tym, by narysować daną figurę bez odrywania ołówka od papieru i bez rysowania tej samej linii wiele razy. Nazwa „eulerowski" wywodzi się stąd, że Euler był pierwszym człowiekiem, który rozwiązał słynny **problem mostów królewieckich**. Pytanie brzmiało: czy można przejść dokładnie jeden raz przez każdy z siedmiu mostów pokazanych na rysunku 6.4 i powrócić do punktu wyjścia. Jest ono równoważne z pytaniem o to, czy graf pokazany na rysunku 6.5 ma cykl Eulera. Tłumaczenie oryginalnej pracy Eulera i dyskusję różnych podobnych problemów znajdzie Czytelnik w książce Biggsa, Lloyda i Wilsona [11].



Rysunek 6.4



Rysunek 6.5

Pytanie, które nasuwa się natychmiast, brzmi: „czy możliwe jest znalezienie warunku koniecznego i wystarczającego na to, by dany graf był eulerowski?" Zanim odpowiemy na to pytanie w twierdzeniu 6.2, udowodnimy prosty lemat.

LEMAT 6.1. *Jeśli w grafie G każdy wierzchołek ma stopień równy co najmniej 2, to graf G zawiera cykl.*

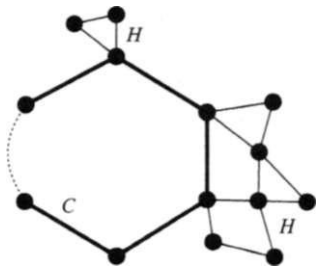
Dowód. Jeśli graf G ma pętle lub krawędzie wielokrotne, to lemat jest trywialny. Możemy zatem założyć, że graf G jest grafem prostym. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G. Tworzymy trasę $v \to v_1 \to v_2 \to \ldots$ przez indukcję, wybierając jako v_1 dowolny wierzchołek sąsiadujący z wierzchołkiem v, a następnie, dla każdego $i > 1$ wybierając jako wierzchołek v_{i+1} dowolny wierzchołek sąsiadujący z v_i, różny od v_{i-1}; istnienie takiego wierzchołka wynika z założenia o grafie G. Ponieważ graf G ma tylko skończenie wiele wierzchołków, więc wreszcie musimy wybrać wierzchołek wybrany już wcześniej. Jeśli v_k jest pierwszym takim wierzchołkiem, to część trasy znajdująca się między pierwszym i drugim wystąpieniem wierzchołka v_k jest szukanym cyklem. ∎

TWIERDZENIE 6.2. (Euler, 1736) *Graf spójny G jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest liczbą parzystą.*

Dowód. $\Rightarrow$ Przypuśćmy, że P jest cyklem Eulera w grafie G. Za każdym razem, gdy cykl P przechodzi przez wierzchołek, udział krawędzi należących do tego cyklu w stopniu danego wierzchołka zwiększa się o 2. Ponieważ każda krawędź występuje w P dokładnie jeden raz, więc stopień każdego wierzchołka musi być liczbą parzystą.

$\Leftarrow$ Prowadzimy dowód przez indukcję względem liczby krawędzi grafu G. Załóżmy, że stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą. Ponieważ graf G jest spójny, więc każdy wierzchołek ma stopień równy co najmniej 2, a zatem z lematu 6.1 wynika, że graf G ma cykl C. Jeśli cykl C zawiera każdą krawędź grafu G, to twierdzenie jest udowodnione. W przeciwnym razie usuwamy z grafu G krawędzie należące do C, tworząc w ten sposób nowy graf H, być może niespójny, który ma mniej krawędzi niż graf G i w którym stopień każdego wierzchołka jest nadal liczbą parzystą. Z założenia indukcyjnego wynika, że każda składowa grafu H ma cykl Eulera. Ponieważ na mocy spójności każda składowa grafu H ma co najmniej jeden wspólny wierzchołek z C, więc szukany cykl Eulera w G otrzymujemy przechodząc krawędzie C dotąd, aż napotkamy nieizolowany wierzchołek grafu H, przechodząc następnie przez cykl Eulera w tej składowej H, która zawiera napotkany wierzchołek, potem podążając znów wzdłuż cyklu C aż do napotkania następnej składowej grafu H i tak dalej. To postępowanie zakończy się, gdy powrócimy do wierzchołka wyjściowego (patrz rys. 6.6). ∎

Ten dowód można łatwo zmodyfikować tak, by udowodnić następujące dwa twierdzenia. Szczegóły dowodów pominiemy.



Rysunek 6.6

WNIOSEK 6.3. *Graf spójny jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór krawędzi można podzielić na rozłączne cykle.*

WNIOSEK 6.4. *Graf spójny jest grafem półeulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki nieparzystych stopni.*

Zauważmy, że w grafie półeulerowskim każda ścieżka Eulera musi zaczynać się w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia i kończyć w drugim takim wierz-

chołku. Zauważmy również, że z lematu o uściskach dłoni wynika, iż żaden graf nie może mieć dokładnie jednego wierzchołka nieparzystego stopnia.

Zakończymy nasze rozważania dotyczące grafów eulerowskich podaniem algorytmu służącego do konstrukcji cyklu Eulera w danym grafie eulerowskim. Ten algorytm jest znany pod nazwą **algorytmu Fleury'ego**.

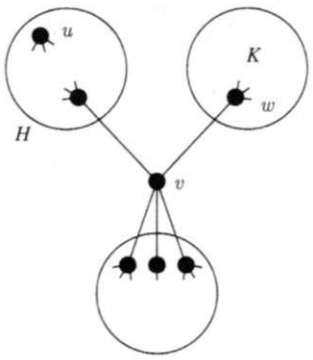
TWIERDZENIE 6.5. *Niech G będzie grafem eulerowskim. Wtedy następująca konstrukcja jest wykonalna i daje w wyniku cykl Eulera w grafie G.*

Zacznij cykl w dowolnym wierzchołku u i przechodź krawędzie w dowolnej kolejności, dbając jedynie o zachowanie następujących zasad:

(1) *usuwaj z grafu przechodzone krawędzie i wierzchołki izolowane powstające w wyniku usuwania tych krawędzi;*

(2) *w każdym momencie przechodź przez most tylko wtedy, gdy nie masz innej możliwości.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że ta konstrukcja może być wykonana w każdym momencie. Przypuśćmy, że dotarliśmy właśnie do wierzchołka v. Jeśli $v \neq u$, to podgraf H, który pozostał po usunięciu przebytych krawędzi, jest spójny i zawiera tylko dwa wierzchołki nieparzystych stopni, u i v. Aby pokazać, że następny krok konstrukcji może być wykonany, musimy dowieść, że usunięcie następnej krawędzi nie rozspójni grafu H lub równoważnie, że wierzchołek v jest incydentny z co najwyżej jednym mostem. Ale gdyby tak nie było, to istniałby most vw taki, że składowa K grafu $H - vw$ zawierająca wierzchołek w nie zawierałaby wierzchołka u (patrz rys. 6.7). Ponieważ stopień wierzchołka w jest liczbą nieparzystą w składowej K, stopień pewnego innego wierzchołka w tej składowej też musi być liczbą nieparzystą, co prowadzi do sprzeczności. Jeśli natomiast $v = u$, to dowód jest w zasadzie taki sam, chyba że nie ma już więcej krawędzi incydentnych z wierzchołkiem u.



Rysunek 6.7

Należy jeszcze pokazać, że ta konstrukcja zawsze daje w wyniku cykl Eulera. Ale jest to oczywiste, bowiem nie mogą w grafie G pozostać krawędzie nie przebyte, gdy została usunięta ostatnia krawędź incydentna z wierzchołkiem u; gdyby tak się stało, to usunięcie pewnej *wcześniejszej* krawędzi incydentnej z którąś z pozostałych krawędzi rozspójniłoby graf, co jednak przeczy zasadzie (2). ∎

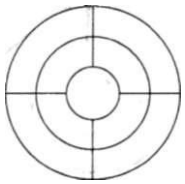
Ćwiczenia do §6

6.1^r Które z następujących grafów są eulerowskie? Które są półeulerowskie?
(a) Graf pełny K_5.
(b) Graf pełny dwudzielny $K_{2,3}$.
(c) Graf sześcianu.
(d) Graf ośmiościanu.
(e) Graf Petersena.

6.2^r Znajdź wszystkie grafy eulerowskie i półeulerowskie w tabeli na rysunku 2.9.

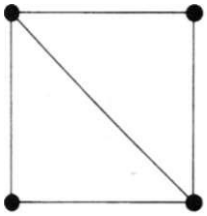
6.3 (a) Dla jakich wartości n graf K_n jest eulerowski?
(b) Które grafy pełne dwudzielne są eulerowskie?
(c) Które grafy platońskie są eulerowskie?
(d) Dla jakich wartości n koło W_n jest grafem eulerowskim?
(e) Dla jakich wartości k grafem eulerowskim jest k-kostka Q_k?

6.4^r Niech G będzie grafem spójnym mającym k wierzchołków nieparzystych stopni (gdzie $k > 0$).
(a) Wykaż, że minimalna liczba ścieżek takich, że każda krawędź należy do dokładnie jednej ścieżki, wynosi $k/2$.
(b) Iloma ciągłymi pociągnięciami ołówka można narysować figurę pokazaną na rysunku 6.8 tak, by nie rysować żadnej linii dwukrotnie?

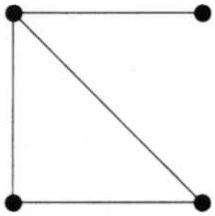


Rysunek 6.8

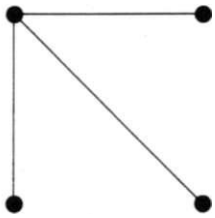
6.5^r Użyj algorytmu Fleury'ego do konstrukcji cyklu Eulera w grafie pokazanym na rysunku 6.9.



Rysunek 7.1

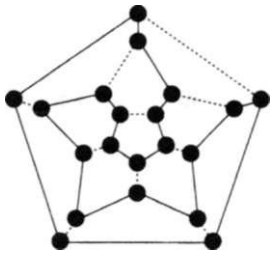


Rysunek 7.2



Rysunek 7.3

Nazwa „cykl Hamiltona" wzięła się stąd, że Sir William Hamilton badał istnienie takich cykli w grafie dwunastościanu, chociaż problemem ogólniejszym zajmował się wcześniej ks. T. P. Kirkman. Cykl taki jest pokazany na rysunku 7.4, na którym liniami ciągłymi zaznaczone są krawędzie należące do cyklu.



Rysunek 7.4

W twierdzeniu 6.2 i wniosku 6.3 otrzymaliśmy warunki konieczne i wystarczające na to, by graf spójny był eulerowski, i możemy mieć nadzieję na uzyskanie podobnych charakteryzacji dla grafów hamiltonowskich. Okazuje się, że znalezie-